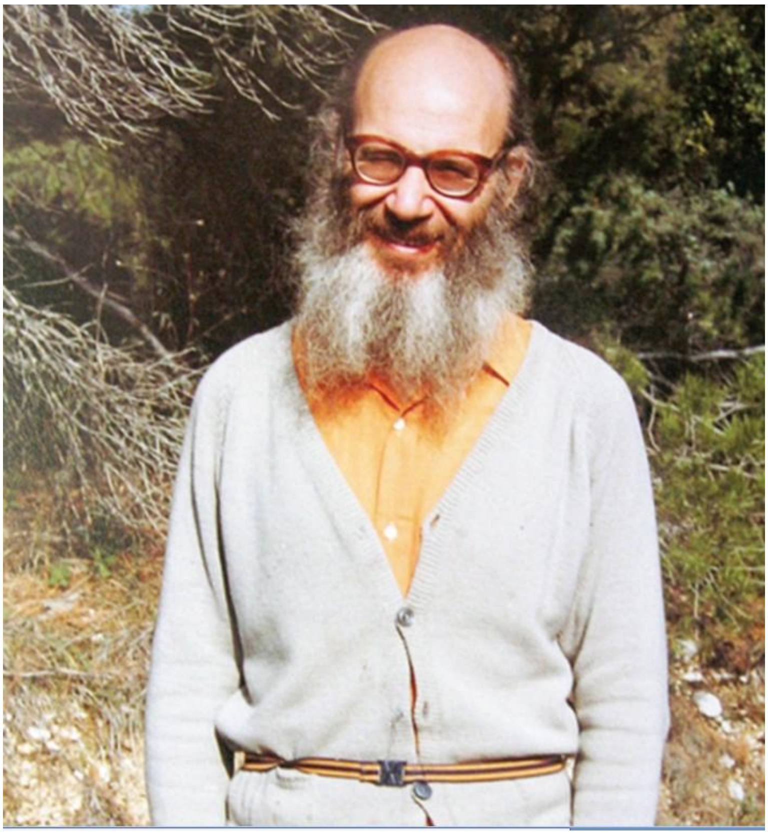
Die besonderen Punkte und Linien des Dreiecks

Der liebe Gott kann die Welt nicht erschaffen haben, denn dann wäre der Kreisumfang ganz genau dreimal so lang wie der Durchmesser geworden. Aber der Teufel hat die Kreislinie so diabolisch gekrümmt, daß nun nicht einmal mehr Gott genau wissen kann, wie groß die Kreiszahl exakt ist!

Und wenn er es sogar wußte, so konnte er es aber nicht aufschreiben. Wenn er es aber aufschreiben gekonnt hätte, dann hat er jedoch π lieber eine ganze Zahl sein lassen!



Alexander Grothendieck 1980

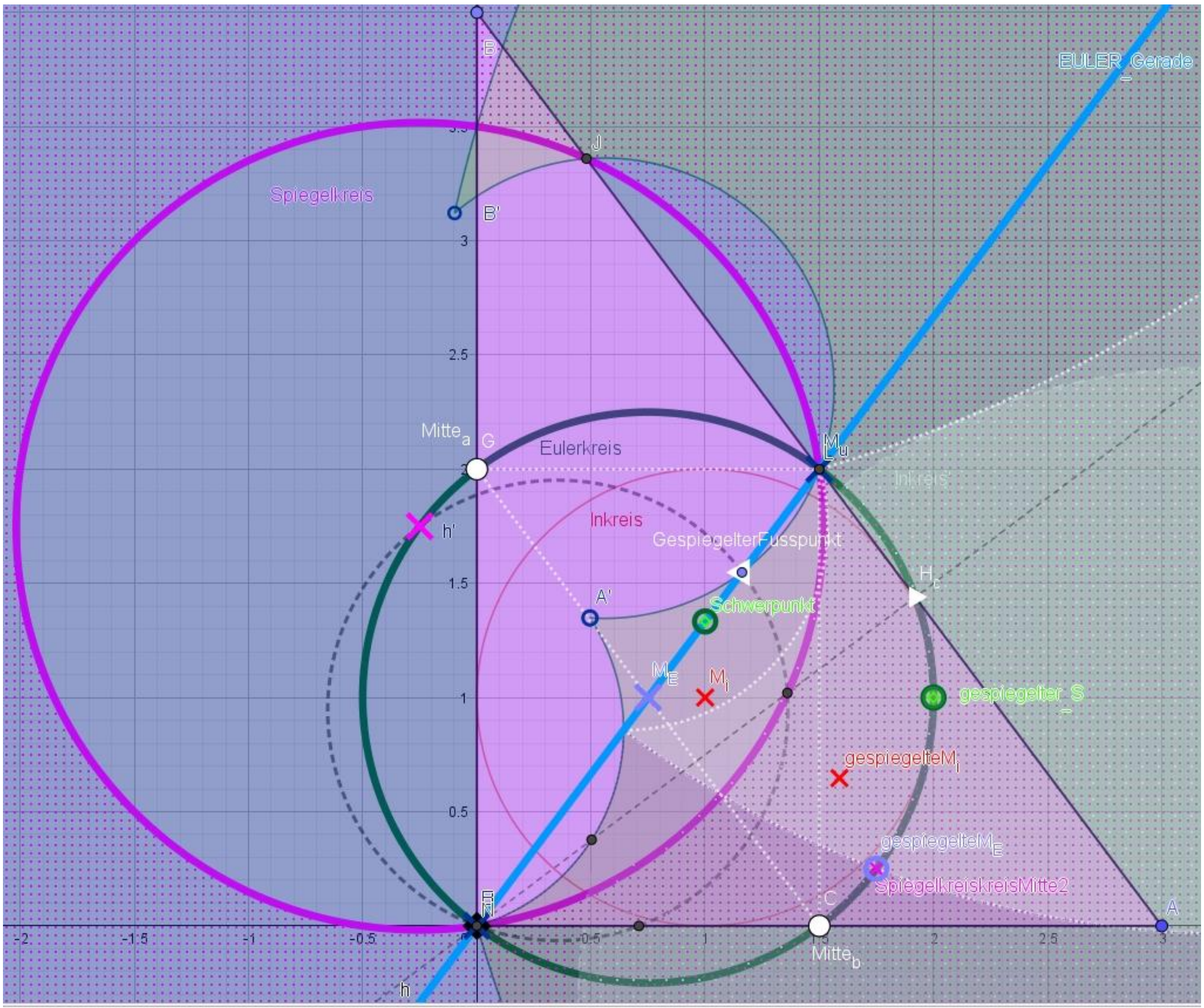
Einleitung

Was wir **in der Schule *gelernt*** haben, ist wichtig wegen der

(!) Allgemein**bildung** (!)

In der Schule lernten wir in Geometrie, daß es **vier besondere** Punkte im Dreieck gibt, wobei **drei von diesen auf einer Geraden** liegen (man sagt auch „kollinear sind“). Diese drei sind das Umkreiszentrum M_u, der Schwerpunkt S und der Höhenschnittpunkt H. Der vierte ist das Inkreiszentrum M_i, das auch auf dieser EULER-Geraden liegt, dann und nur dann, wenn das Dreieck gleichschenklig ist!

Von den besonderen Kreisen des Dreiecks lernte man **nur den In- und Umkreis** kennen. Der nächte Besondere wäre der EULER-Kreis gewesen, den man auch 17-Punkte-Kreis hätte nennen können. Hier erst hätte man etwas von der Faszination der Geometrie miterlebt. Doch das scheint nicht erwünscht zu sein!



Die himmlisch **blaue EULER-Gerade**
wird durch Spiegelung am pinken Kreis
in den grünlichen **EULER-Kreis** abgebildet

EULER-Kreis und Euler-Gerade

Die Mittelpunkte der drei Dreiecksseiten bilden ein zum Ausgangsdreieck ähnliches Dreieck, das man Mittendreieck nennt. Durch eine zentrische Streckung am Schwerpunkt S mit dem Steckungsfaktor k = -½ ([1]) kann man damit auch den EULER-Kreis aus dem Umkreis erhalten, der eben auch Umkreis des Mittendreiecks ist (deswegen ist sein Radius auch der halbe Umkreisradius R).

Umgekehrt, wenn ABC das Mittendreieck sein soll, nennt man das am S zentrisch gestreckte Dreieck mit k = -2 das Anti-Mittendreieck, dessen Mittelsenkrechten bekanntlich gerade die Höhen des Dreieck ABC sind. Nicht verwunderlich, daß H und S auf einer Leonhard „EULER" zu Ehren genannten Geraden liegen, wobei H doppelt so weit vom Schwerpunkt S entfernt liegt wie die Umkreismitte M_u. Die Mitte der Strecke M_uH von der Umkreismitte M_u zum Höhenschnitt H ist genau das Zentrum des EULER-Kreises.

Die Länge der Strecke $|M_uH|$ kann auch ziemlich einfach berechnet werden:

---

[1] Minus, weil Original und Bild auf verschieden^{2}n Seiten des Zentrums S liegen!

$$|M_u H| = \sqrt{(3R)^2 - (\sum a_i^2)}$$

Den Umkreisradius R (im Unterschied zu r für den Inkreisradius)

kann man auch aus dem Seitenprodukt $\boxed{abc = 4RA_\Delta}$ berechnen

Daraus folgt übrigens, daß die Summe der Quadrate der Seitenlängen $\sum a_i^2$ immer kleiner/gleich als das neunfache des Umkreisradius zum Quadrat ist([2]):

$$\boxed{a^2+b^2+c^2 <= 9R^2}$$

Beim rechtwinkligen Dreieck beispielsweise ist die Summe $\sum a_i^2 = 2c^2$

(wenn c Hypotenuse ist)

und da R = ½c ist, wird $2c^2 < 2\tfrac{1}{4}\, c^2$

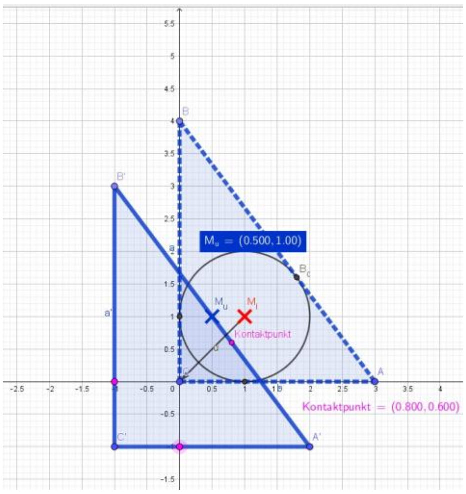
Den Umkreismittelpunkt kann man auch über die drei Berührpunkte B_i berechnen:

Der ***Umkreismittelpunkt*** ist

wenn **M_i in Ursprung** liegt

$$M_u = -R/r \left(\sum B_i \right)$$

= *Summe der Berührpunkte mal –R/r*



Beispiel für unser Standard-Dreieck 3, 4 und 5 mit M_i im Ursprung!
Die Berührpunkte sind (0; -1), (-1; 0) und B_c =(0,8; 0,6)
summiert (-0,2; -0,4) mal -2,5 ist M_u = (0,5; 1)

---

[2] Gleichheit nur beim Gleichseitigen Dreieck, wenn alle besonderen Punkte zu einem einzigen Zentrum werden, mit $|M_u H|$ = 0 und ohne Euler-Gerade

Den Unkreismittelpunkt $\mathbf{M_u}$ berechnet sich komplex als

$$\boxed{M_u =} \{A^*Aa+B^*Bb+C^*Cc\} / (4A_\Delta \mathbf{i})$$

$$\boxed{= \{A^2a+B^2b+C^2c\} / (4A_\Delta \mathbf{i})}$$

mit a = (C-B), b = (A-C) und c = (B-A)

Beispiel: A= 3 B = 4i und C= 0 (Ursprung)

a = (C-B)= -B = -4i, b = (3-0)=3 und c =3-4i mit A_Δ=6

M_u ={ -9∗4i + 4i∗(4i)∗(3) + 0 }/24i = {-36i + (-144-64i}/24i

= (-36i +48) / (- 24i)

= 1,5 + 2i (da 1/i= -i ist)

M_u = (1,5; 2)

$|M_uH| = \sqrt{\{(3R)^2-(\sum a_i^2)\}} = \sqrt{\{9*\frac{1}{4}*5^2 - 2*5^2\}} = \frac{1}{2}*5 = R$

die Strecke von Mu nach H ist also genau der Umkreisradius

und H liegt somit in Richtung S=(A+B+C)/3=(1; 1.3 p3)

von M_u = (1,5; 2) gerade 2,5 entfernt, und ist wegen $|M_u|^2 = 1{,}5^2+2^2$ also genau im Ursprung!

Die Mitte des Eulerkreises ist somit die Mitte von $OM_u = M_u$

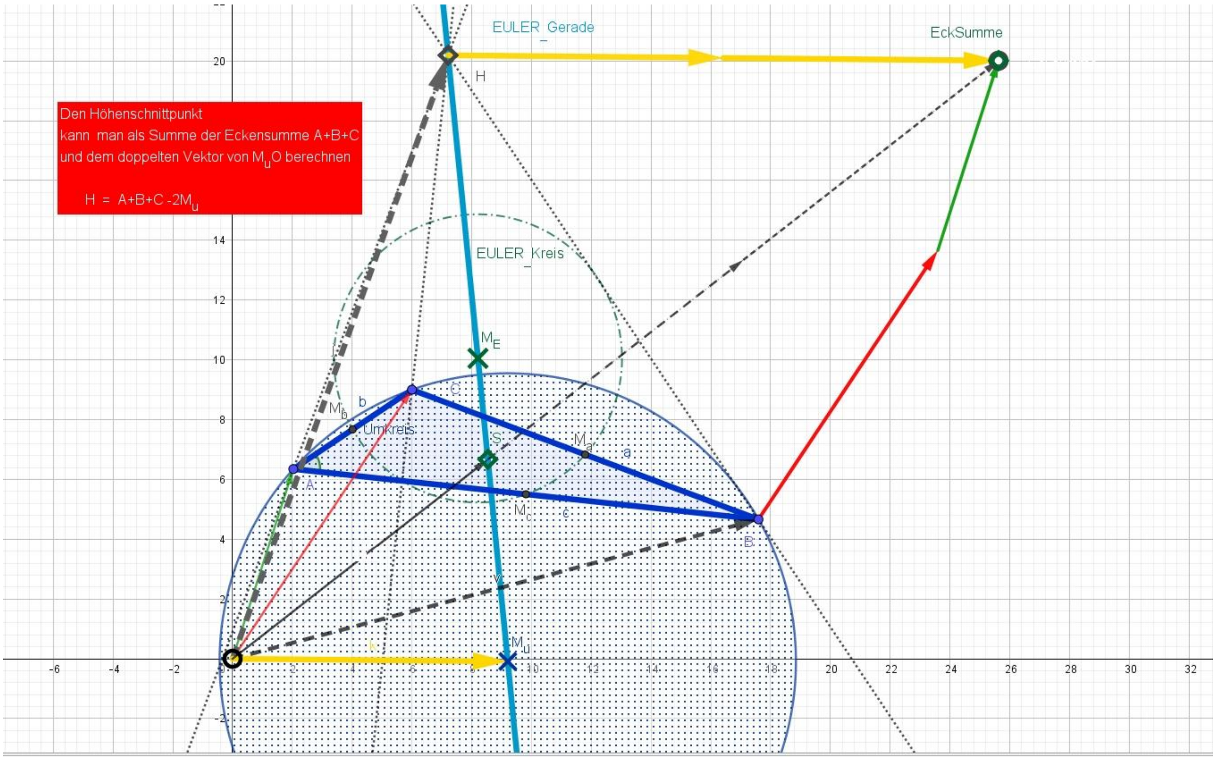
= ½(1,5; 2) = (0,75; 1)

Noch einfacher kann man den Höhenschnitt H als doppelte Differenz der Eckensumme von Ortsvektor zur Umkreismitte berechnen

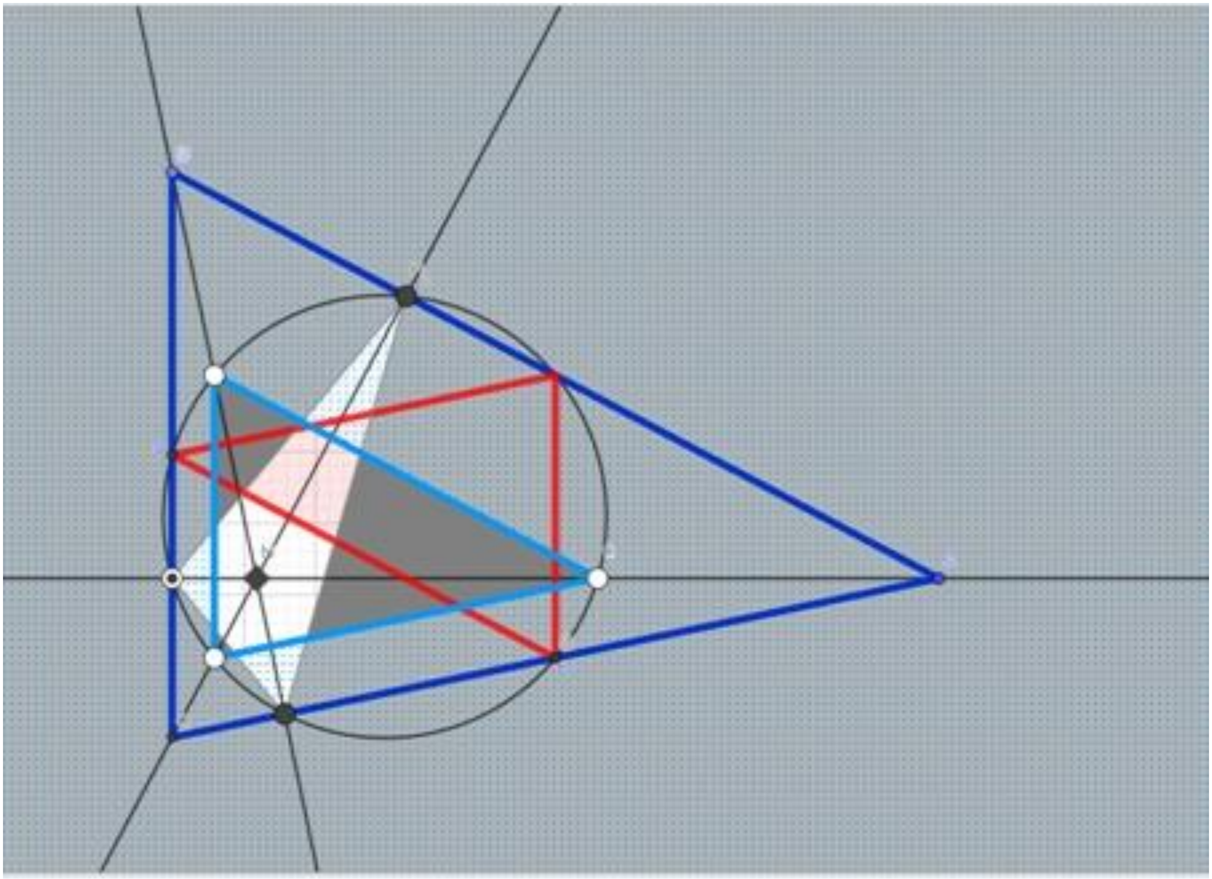
$$\boxed{H = A+B+C - 2M_u}$$

Beispiel: A=(3; 0) und B=(0; 4) und C im Ursprung

$H = (3; 0) + (0; 4) - 2 * (1{,}5; 2) = (0; 0)$



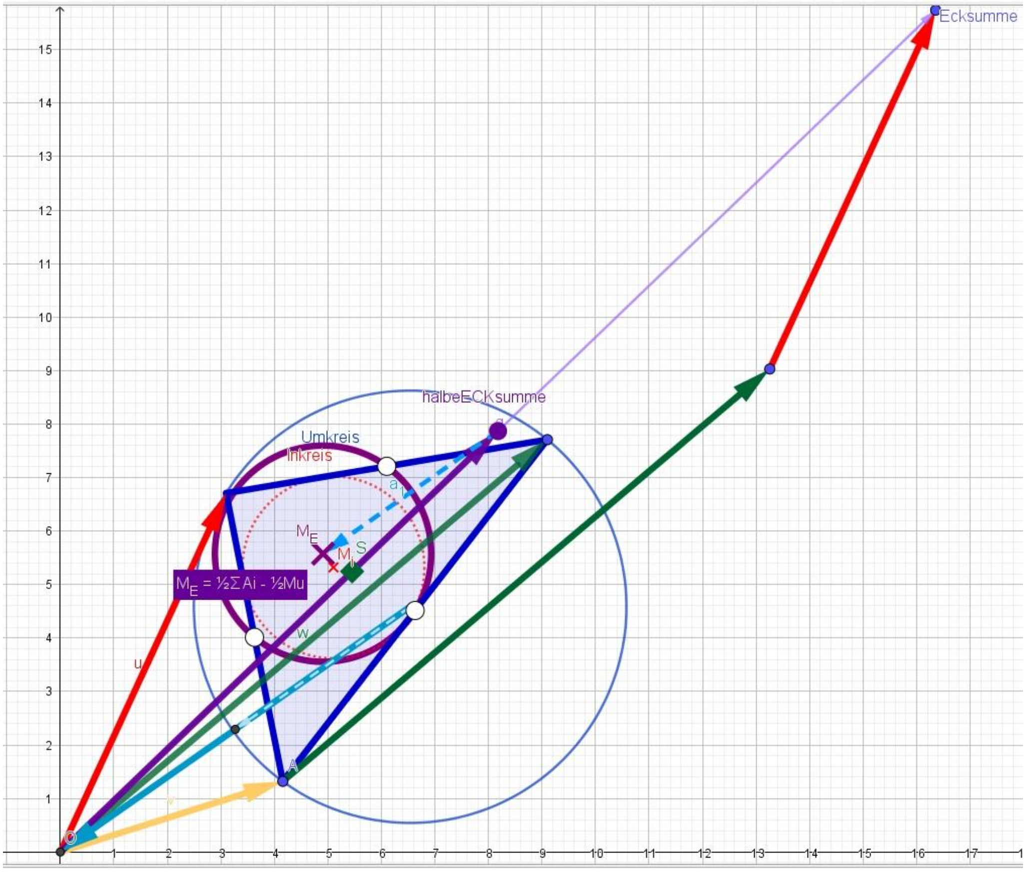
Die Ortsvektoren der Ecken summiert A+B+C ergeben H + 2 M_u

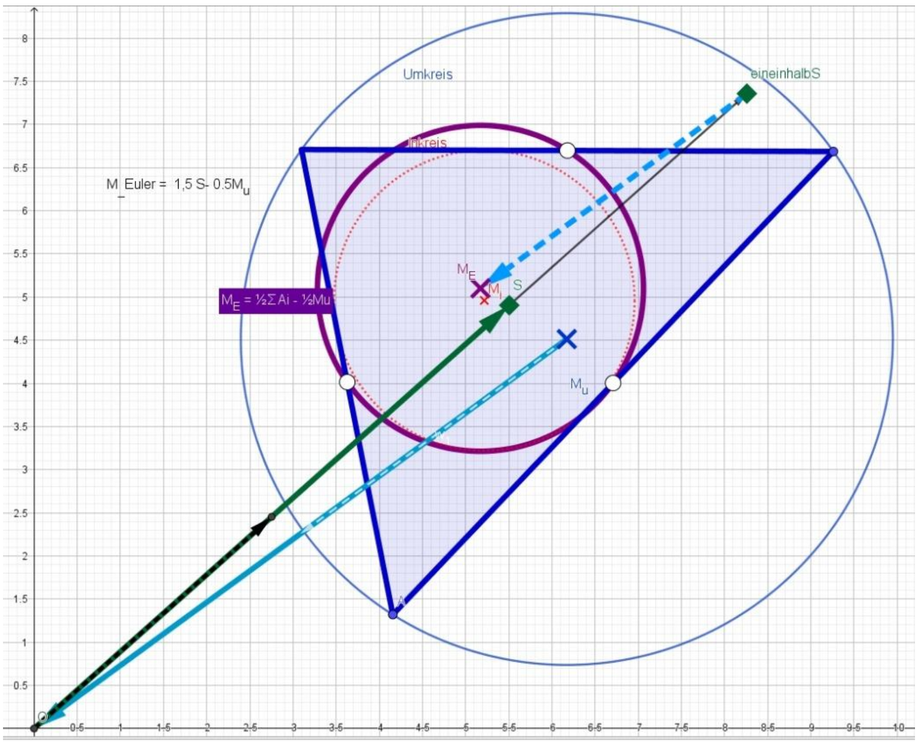


EULER-Kreis und EULER-Dreieck (rotes an der Eulerkreismitte punktgespiegeltes Mittendreieck), weiß ist das Fußpunktdreieck

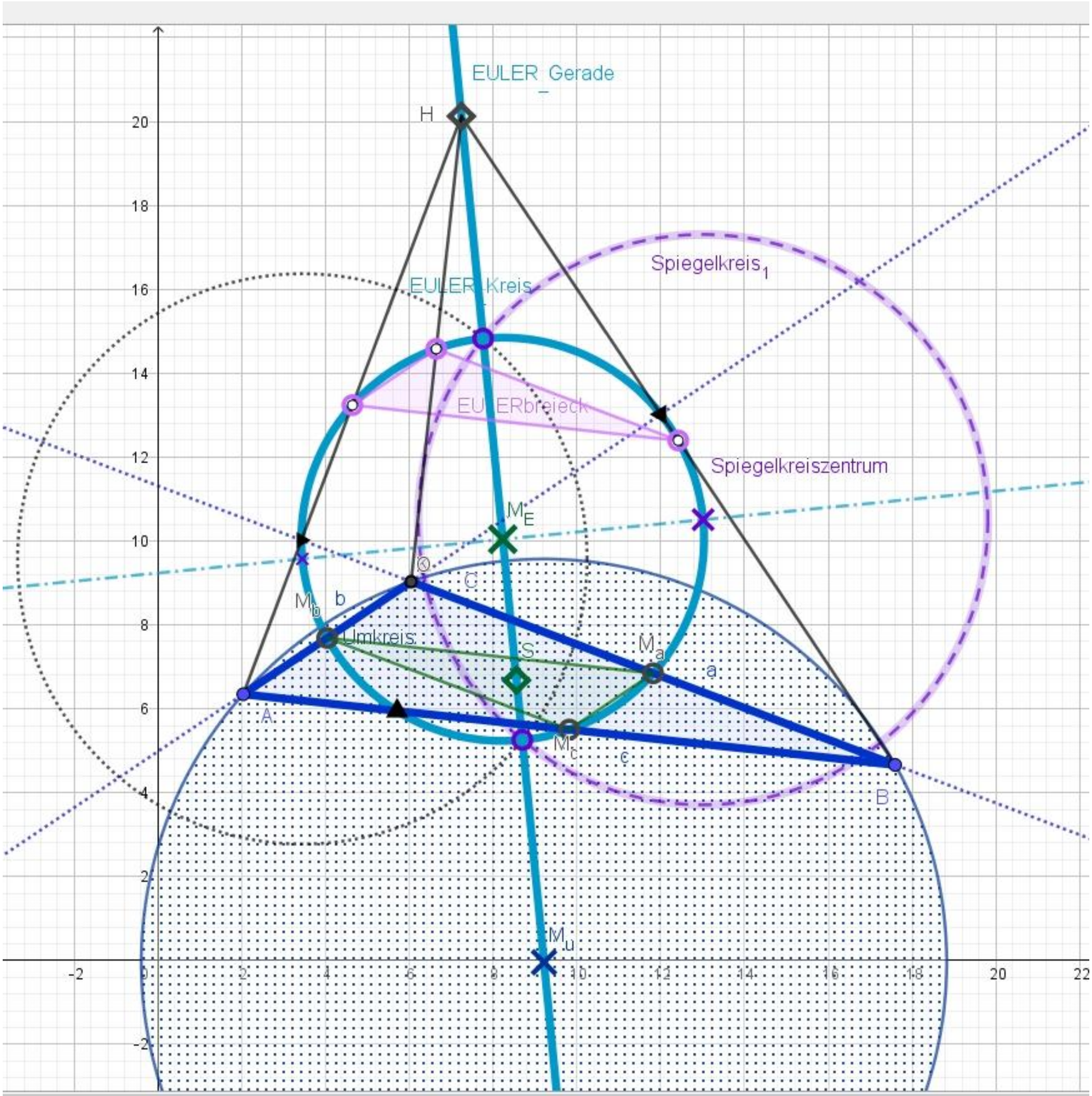
Der Mittelpunkt des EULER-Kreises ist mit $M_{\_Euler} = ½(H+M_u)$

Daraus folgt $\boxed{M_{Euler} = ½\sum A_i - ½M_u}$





Das Eulerkreiszentrum $M_{Euler} = ½(A+B+C-M_u) = ½(3S-M_u)$



Auf dem EULER-Kreis liegen 17 spezielle Punkte:

3 Seitenmitten
3 Höhenfußpunkte (nicht eingezeichnet)
3 Mittelpunkte von den Ecken bis H (Eulerdreieck)

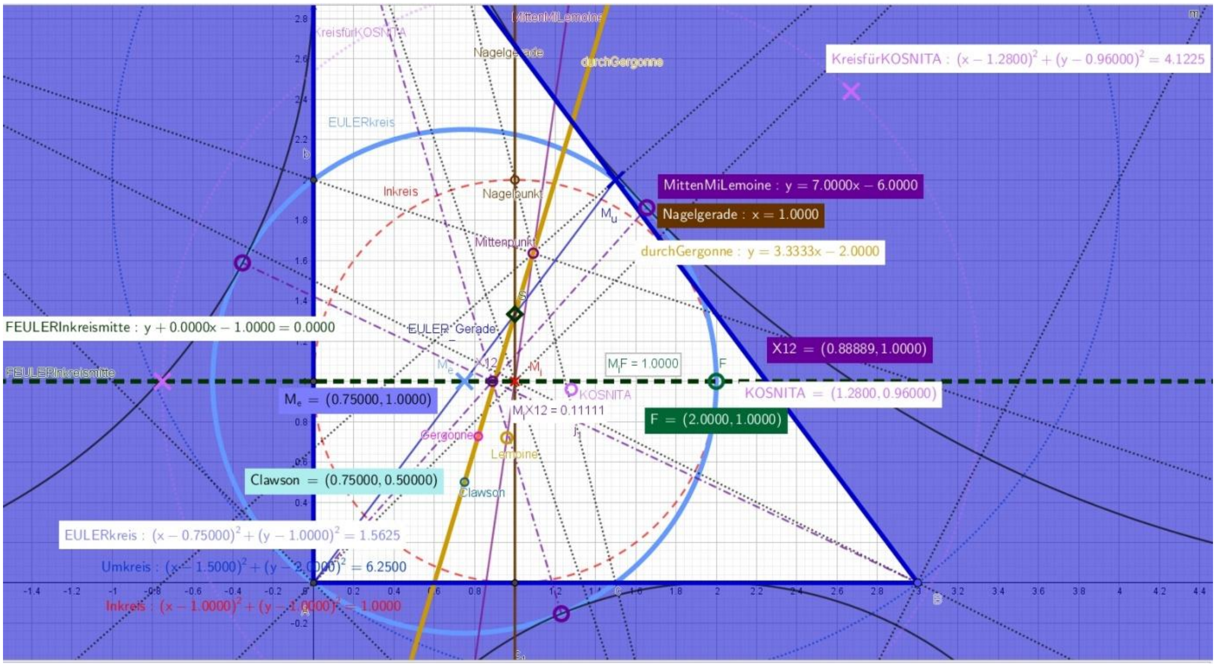
4 Schnittpunkte mit der EULER-Geraden <
und dazu Senkrechten durch M_E

Die 4 (nicht eingezeichnete) <
Berührpunkte mit dem In-und den 3 Ankreisen

Unter den besonderen Kreisen ist der **EULER-Kreis einer der wichtigsten** (wenn nicht der wichtigste) und wird heutzutage meist als **Feuerbachkreis**[3] bezeichnet! Daher auch der Name für den Feuerbachberührpunkt mit dem Inkreis: Der ***Feuerbachpunkt F*** ist der einzige Schnittpunkt (=Berührpunkt) des Inkreises mit dem EULER-Kreis.

Man berechnet ihn, indem man zu M_i den mit dem den Radius r multiplizierten Einheitsvektor des Vektors vom Eulerzentrum zur Inkreismitte ($\mathbf{M_i - M_E}$) addiert:

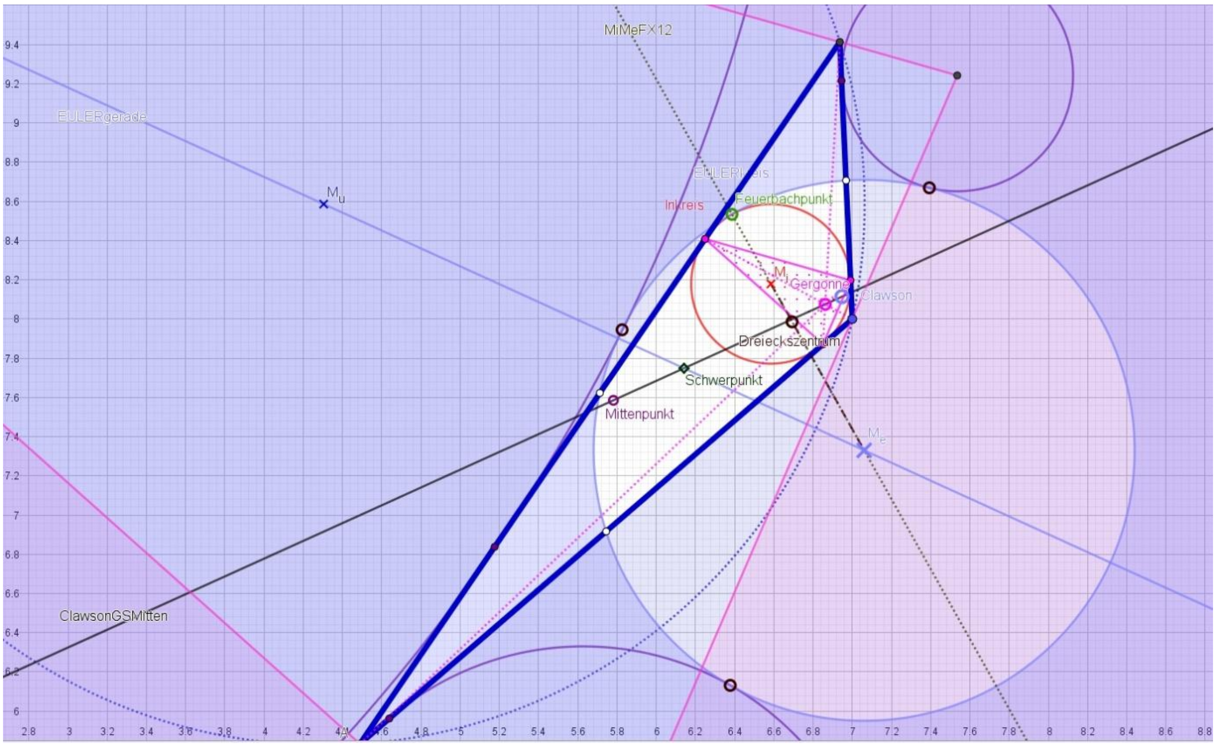
$$\boxed{F = M_i + r\,(\mathbf{M_i - M_E}) \,/\, |(M_i - M_E)|}$$



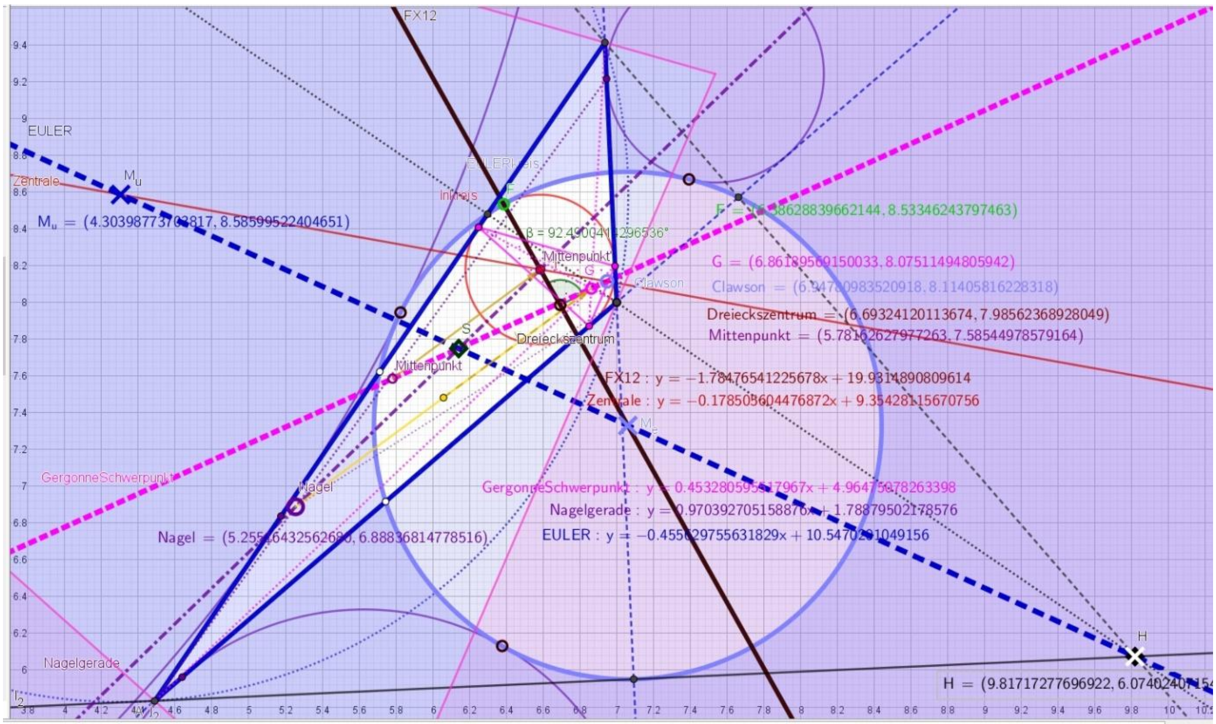
Das **Deieckszentrum X12** liegt auf der Geraden durch den Feuerbachpunkt und die EULER- und IN-Kreismitte $\mathbf{M_e}$ und $\mathbf{M_i}$

Wenn man die **EULER-Kreis-Mitte $\mathbf{M_E}$ isogonal konjugiert**, erhält man den **Kosnita**-Punkt. Diesen erhält man als Schnittpunkt, indem man die Zentren der *durch M_u und je zwei Dreiecksecken gebildeten drei Umkreise* der drei Teildreiecke jeweils mit einer Dreiecksgegenecke verbindet.>
(Im rechtwinkligen Fall sind es nur zwei sich schneidende Umkreise).

[3] Karl Feuerbach bewies, daß die Ankreise und der Inkreis vom EULERkreis berührt werden! Der Inkreis liegt also stets vollständig im EULERkreis, die von außen berührenden Ankreise vollständig außerhalb des EULERkreises!

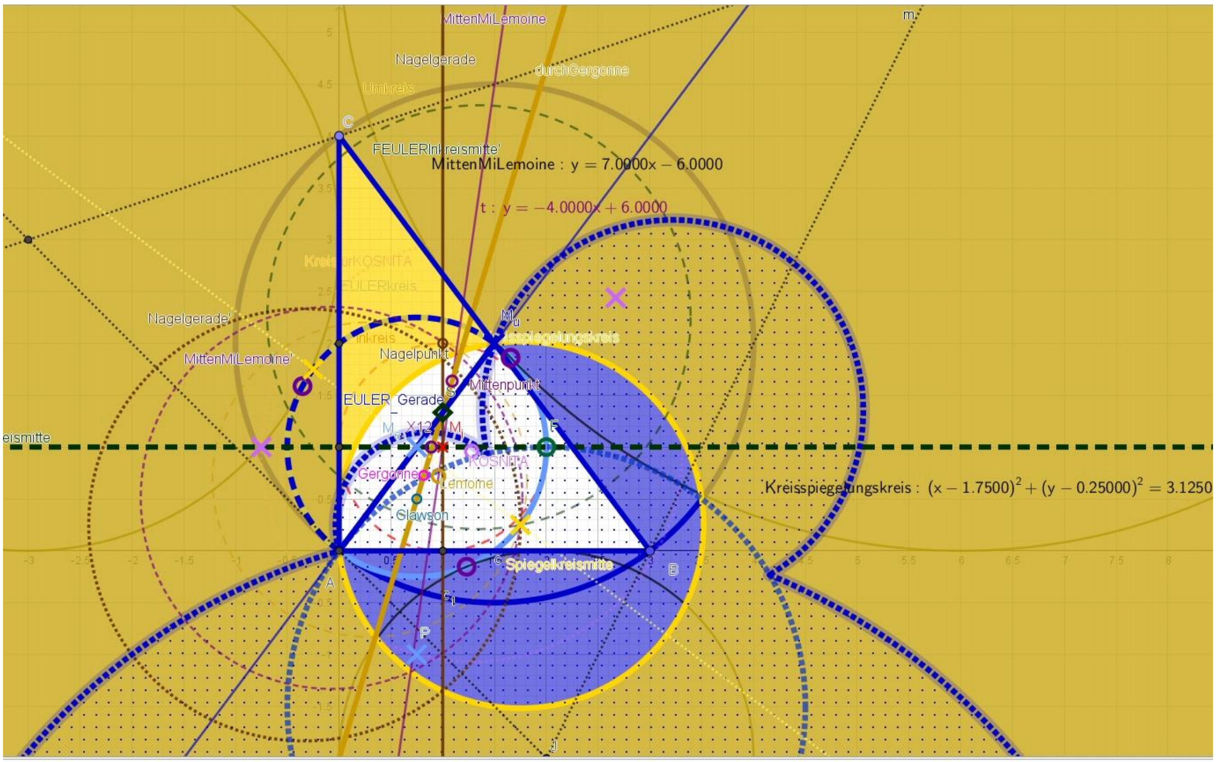


Dreieckszentrum X12 liegt nicht auf „Gergone“-Geraden durch Clawson,
sondern auf der Geraden durch den Feuerbachpunkt F
und die Inkreis- M_i sowie die Eulerkreismitte M_e



Einige besondere Geraden

(hier in einem Dreieck mit rein irrationalen Seiten)



Es gibt übrigens auch zwei Spiegelkreis(e), welche die Eulergerade in den Eulerkreis abbilden. Diese gehen durch die beiden Schnittpunkte der EULER-Geraden mit dem EULER-Kreis, und ihr Mittelpunkt ist jeweils einer der beiden Schnittpunkte der in der EULER-Kreismitte M_{Euler} **zur Eulergeraden senkrecht** stehenden Gerade mit dem EULER-Kreis.

Bemerkung

Clark **Kimberling** schreibt auf seiner Homepage, daß die EULER-Gerade **die allerberühmteste Gerade in der Dreiecksgeometrie** ist. Benannt zu Ehren von Leonhard EULER, der mehr Papiere über die Mathematik veröffentlichte als jeder andere! Auf der EULER-Geraden liegen noch mindestens weitere 102 besondere Punkte, wie zB. der Schiffler-, Exeter-oder Conway-Punkt (siehe nachfolgende Liste mit einigen X-Punkten). Auch hat sie vier besondere EULER-Parallelen und zehn besondere EULER-Senkrechte.

Clark Kimberling Home Page

(https://faculty.evansville.edu/ck6/tcenters/class/eulerline.html)

X(2) = S = Schwerpunkt (centroid)
X(3) = Umkreiszentrum M_u (circumcenter)
X(4) = Höhenschnitt H (orthocenter)
X(5) = Eulerkreismitte M_e (nine-point center)
X(20) = DeLongchamp point

X(21) = Schiffler point
X(22) = Exeter point
X(23) = far-out point
X(24) = perspector of ABC and orthic-of-orthic triangle
X(25) = homothetic center of orthic and tangential triangles
X(26) = circumcenter of tangential triangle
X(27) = (sec A)/(b + c) : :
X(28) = (tan A)/(b + c) : :
X(29) = (sec A)/(cos B + cos C) : :
X(30) = Euler infinity point
X(140) = nine-point center of medial triangle
X(186) = inverse of X(4) in circumcircle
X(199) = a [b^4 + c^4 - a^4 + (b^2 + c^2 - a^2)(bc + ca + ab)] : :
X(235) = midpoint of segment X(4)-to-X(24)
X(237) = Brocard angle of ABC
X(297) = csc^2 A cos(A + w) : : where w = Brocard angle of ABC
X(376) = csc A (5 sin 2A - sin 2B - sin 2C) : : = reflection of X(2) about X(3)
X(377) = bc [b^4 + c^4 - a^4 - 2 b^2 c^2 - 2 abc(a + b + c)] : :
X(378) = harmonic conjugate of X(24) w.r.t. X(3) and X(4)
X(379) = bc [a^5 + (b + c)(a^2 bc - (b - c)^2 (bc + ca + ab))] : :
X(381) = midpoint of segment X(2)-to-X(4)
X(382) = cos A - 4 cos B cos C : :
X(383) = csc(B - C)[sin 2B sin(C - w) sin(C + pi/3) - sin 2C sin(B - w) sin(B + pi/3) : :
X(384) = a^3 + (b^2)(c^2)/a : : = Conway point

"New" Centers (most of them found after 1998)

X(401) = Bailey point
X(402) = Gossard perspector
X(403) =X(36) of orthic triangle
X(404) = harmonic conjugate of X(21) w.r.t. X(2) and X(3)
X(405) = (a + b + c)/a + cos A : :
X(406) = (a + b + c)/a + sec A : :
X(407) = (y + z) sec A : : , where x : y : z = X(21)
X(408) = (y + z) cos A : : , where x : y : z = X(29)
X(409) = x^2 + yz : : , where x : y : z = X(21)
X(410) = x^2 + yz : : , where x : y : z = X(29)
X(411) = (1/y)^2 + (1/z)^2 - (1/x)^2 : : , where x : y : z = X(21)
X(412) = (1/y)^2 + (1/z)^2 - (1/x)^2 : : , where x : y : z = X(29)
X(413) = x^3 (y^2 + z^2 - yz) : : , where x : y : z = X(21)
X(414) = x^3 (y^2 + z^2 - yz) : : , where x : y : z = X(29)
X(415) = (x^2 - yz) sec A : : , where x : y : z = X(21)
X(416) = (x^2 - yz) cos A : : , where x : y : z = X(29)
X(417) = (y^2 + z^2) cos A : : , where x : y : z = X(4)
X(418) = (csc 2B + csc 2C) cos A : :
X(419) = (x^2 - yz) sec A : : , where x : y : z = X(31)
X(420) = (x^2 - yz) sec A : : , where x : y : z = X(38)
X(421) = (x^2 - yz) sec A : : , where x : y : z = X(47)
X(422) = (x^2 - yz) sec A : : , where x : y : z = X(58)
X(423) = (x^2 - yz) sec A : : , where x : y : z = X(81)
X(424) = (x^2 - yz) sec A : : , where x : y : z = X(191)
X(425) = (x^2 - yz) sec A : : , where x : y : z = X(283)
X(426) = (y^2 + z^2) cos A : : , where x : y : z = X(19)
X(427) = (y + z) sec A : : , where x : y : z = X(31) ….usw.

The EULER line (pronounced Oiler) penned more pages of original mathematics than any other human being. https://faculty.evansville.edu/ck6/tcenters/class/eulerline.html

Weitere besondere Punkte

Den Inkreismittelpunkt M_i = (1; 1) können wir einfach als durchschnittlich mit den Gegenseitenlängen gewichtete Ecken berechnen:

Die Koordinaten von M_i sind[4]:

$$\mathbf{x}_{M_i} = (ax_A+bx_B+cx_C) / u$$
$$\mathbf{y}_{M_i} = (ay_A+by_B+cy_C) / u$$

Mit A=(3; 0) und B=(0; 4) und C im Ursprung wird für die Seitenlängen a=4 und b=3 der Umfang u=12

der x-Wert von M_i

$$(4*3 + 0 \;\; + 0) /12 = 1$$

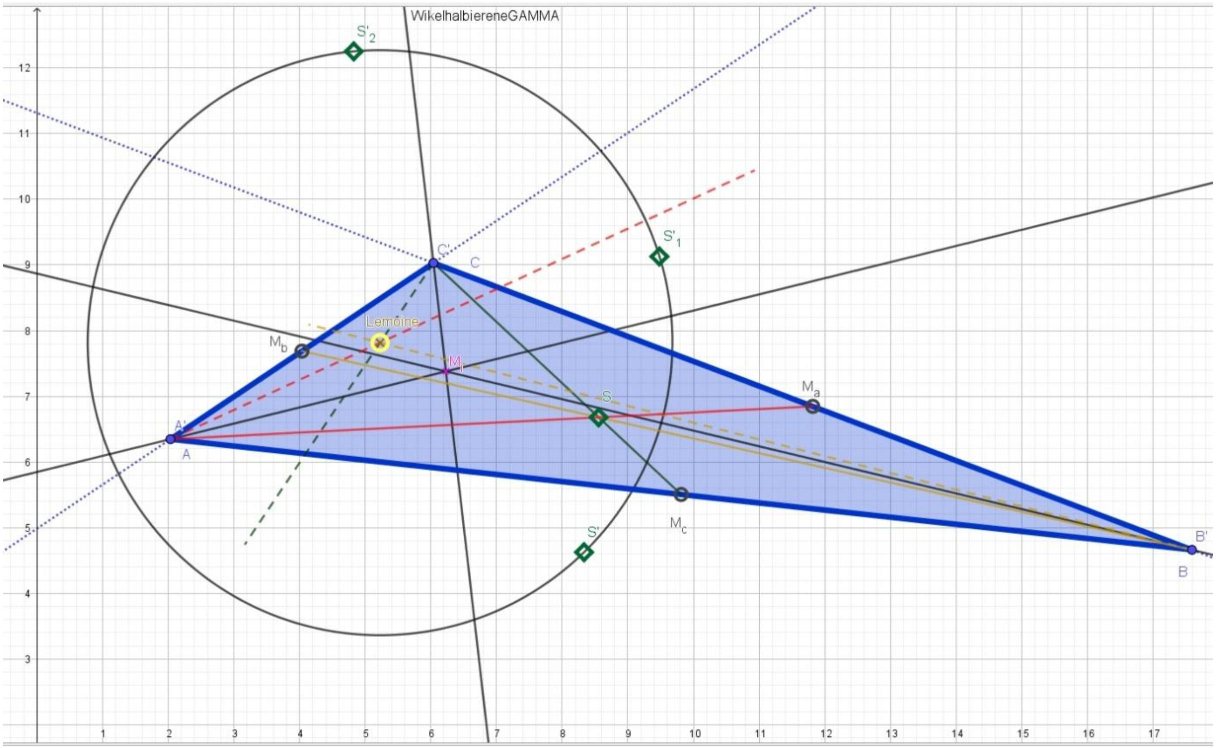
und ebenso erhält man für den y-Wert von M_i

$$(4*0 + 3*4 \;\; + 0) /12 = 1$$

4 hier sind a_i (für i=1 bis 3) die reinen Seitenlängen der Gegenecken

Zwei weitere besondere Punkte des Dreiecks, die wir **in der Schule nicht gelernt** haben, sind der Lemoine-Punkt und der **Gergonne-Punkt**.

Während der Höhenschnittpunkt zur Umkreismitte „isogonal konjugiert" ist, ist der Lemoine-Punkt L ein isogonales Konjungat zum Schwerpunkt S. Dieser 1873 von Emile Lemoine beschriebene **Symmedian** kann man auf zwei äquivalente Arten erzeugen.



Zum einen durch die Spiegelung der Seitenhalbierenden an den Winkelhalbierenden (daher auch der Name Symmedian) oder als Mittelpunkt desjenigen Kreises, der durch die von L an den Seiten gespiegelten drei Spiegelpunkte geht.

Während der Schwerpunkt S das Summen-Minimum der Entfernungsquadrate zu den Ecken ist, ist der Lemoine-Punkt L das Minimum der Summe aller drei Abstandsquadrate zu den Seiten.

Die Entfernungsquadrate eines Dreieckspunkts X zu den Ecken A_i sind $(X-A_i)^2$. Für deren Summe $\mathbf{s} = (X-A)^2 + (X-A)^2 + (X-A)^2$ wird die Ableitung nach X

$$\mathbf{s}` = 2(X-A) + 2(X-B) + 2(X-C) = 0$$

woraus für den Schwerpunkt schließlich $X = (A+B+C)/3$ folgt!

Für das Minimum der Summen der n-ten Potenzen der Eckentfernungen

$$\mathbf{s} = |(X-A)|^n + |(X-B)|^n + |(X-C)|^n$$

liefert der **Grenzwert für n gegen unendlich die Umkreismitte M_u**
(nach numerischen Computerberechnungen bzw. Darstellungen von Peter Haider)!

Für die minimale n-te Potenzensumme der drei Abstände zu den Seiten ergibt sich nach Arno Fehringer

Damit ist der Punkt $\boxed{z = \dfrac{|a|^{\frac{n}{n-1}}A + |b|^{\frac{n}{n-1}}B + |c|^{\frac{n}{n-1}}C}{|a|^{\frac{n}{n-1}} + |b|^{\frac{n}{n-1}} + |c|^{\frac{n}{n-1}}}}$

ein Punkt, für den die **Summe der Abstandspotenzen minimal** ist

(*Siehe A. Fehringer Mathematikgarten.hpage.com/schriften.html)*

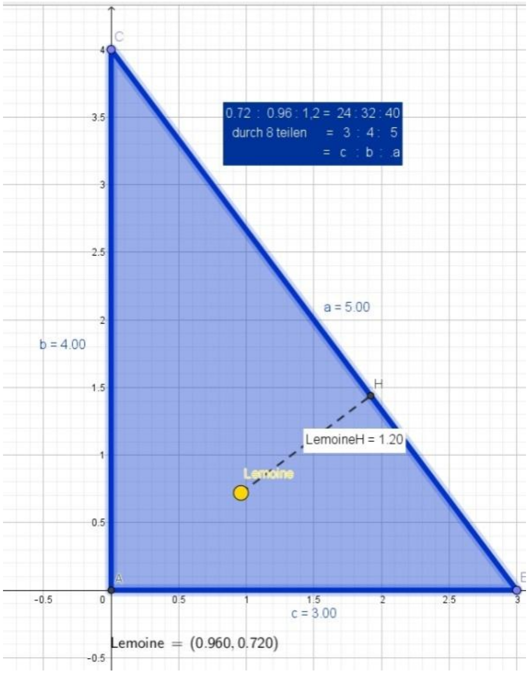
Hier kann man den Grenzwert für n gegen unendlich leicht bilden und es ergibt sich genau die Inkreismitte M_i!

Für n=2 erhalten wir L

Komplex berechnet ist der Lemoinepunkt

$$\mathbf{L} = (a^2A+b^2B+c^2C)/\ \sum a_i^2$$

Wobei a, b und c hier die reinen Seitenlängen sind (d.h. man muß nicht komplex arbeiten)



Die Abstände von L zu den Seiten verhalten sich wie die Seitenverhältnisse a : b :c.

(Beim RECHTWINKLIGEN Dreieck ist L die Höhenmitte!)

$$L = (a^2A+b^2B+c^2C)/\ \sum a_i^2$$

Beispiel : Heronsches Standarddreieck der Seitenlängen 13, 14 und 15

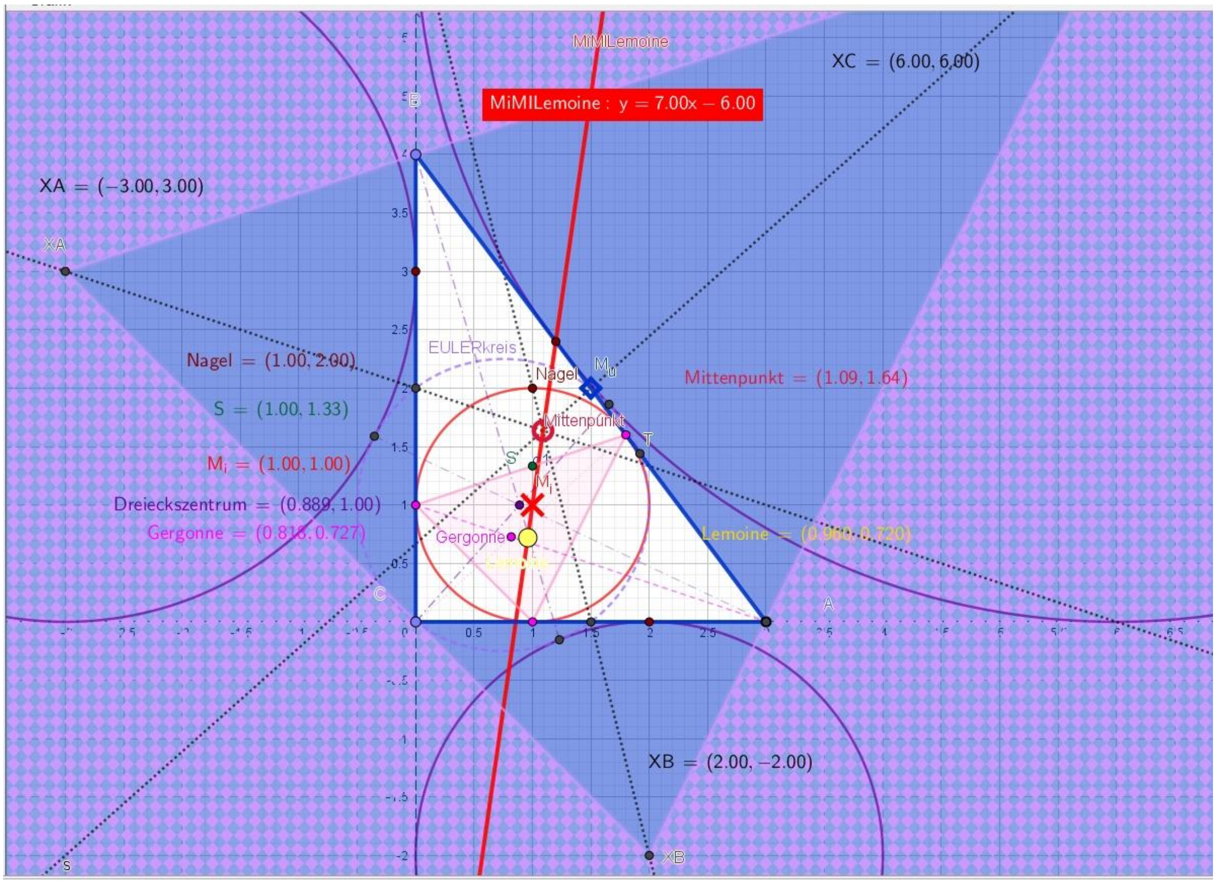
$A=14$, $B=5+12\mathbf{i}$ und ***C=0 im Ursprung***

$a=C-B = -5-12\mathbf{i}$

$b=A-C =A=14$ und

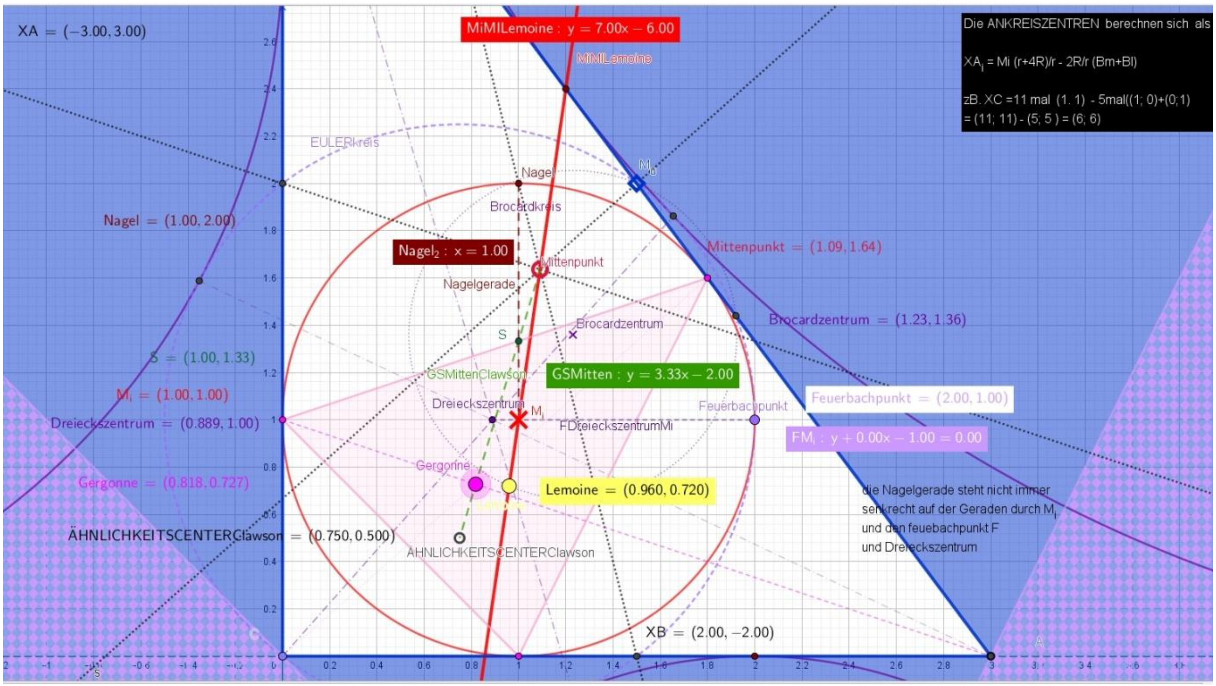
$c=B-A= -9+12\mathbf{i}$

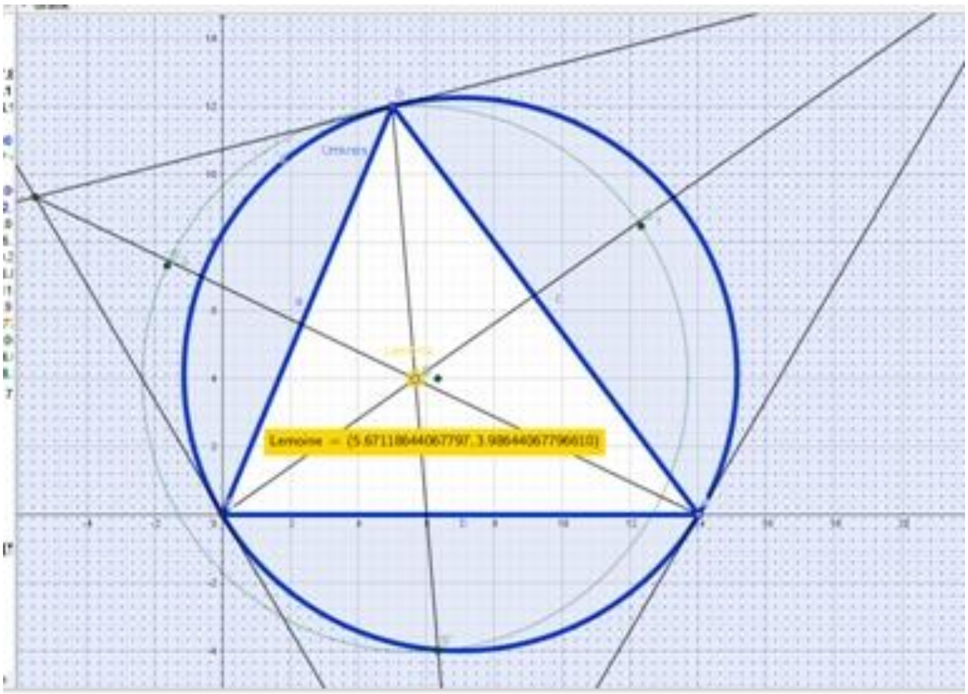
$$L = \{14\,(-1)^2(5+12\mathbf{i})^2 + (5+12\mathbf{i})14^2 + 0\}\,/590 \approx 5.67 + 3{,}99\mathbf{i}$$



Der Lemoinepunkt L liegt mit der Inkreismitte M_i und dem Mittenpunkt auf einer Geraden

(Im Mittenpunkt schneiden sich die Verbindungen der Ankreiszentren mit den Gegenecken des Dreiecks ABC)

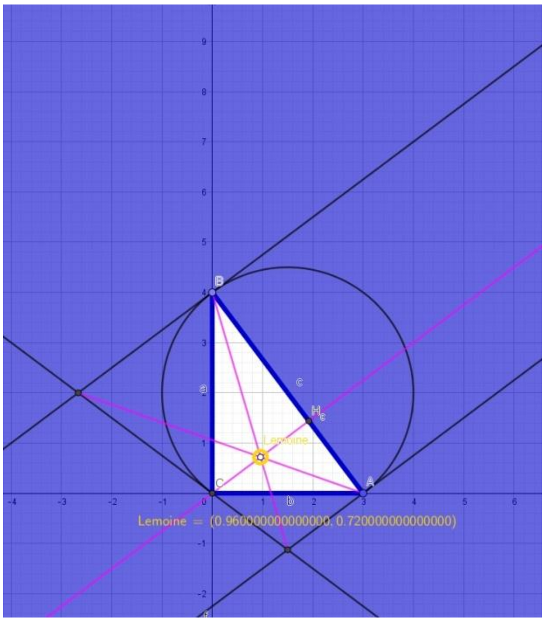




Der **Lemoinepunkt** ist der**Gergonnepunkt**

des Tangentendreiecks von ABC,

Von den Ecken des Dreiecks der drei Berühr-Tangenten
an den Umkreis
werden die Strecken von dessen Ecken
zu den Dreiecksgegenecken von ABC
gezogen, die kopunktal sind!



Das geht auch beim rechtwinkligen Dreieck mit zwei parallelen Tangenten,
wobei die sich im „Unendlichen" schneiden
(Parallele durch die Höhenfußpunkt-Ecke)

Der Gergonne-Punkt ist der Schnittpunkt der Inkreisberührpunkt-Gegenecken-Verbindungen und ist komplex

$$\text{Gergonne} =$$

$$A_\Delta r[\quad A / \{ax^2 + A_\Delta r\}$$
$$+\ B / \{by^2 + A_\Delta r\}$$
$$+\ C / \{cz^2 + A_\Delta r\}\ ]$$

mit den Tangential-Abschnitten $z = ½(a+b-c)$
$y = ½(c+a-b)$
$x = ½(b+c-a)$

Beispiel:

Standard-Dreieck A = 3, B = 4i und C = 0+0i
a=4, b=3 und Hypotenuse c=5
Fläche $A_\Delta = 6$, $r = 1$
Tangentialabschnitte $x = ½(b+c-a) = 2$
$y = ½(c+a-b) = 3$
$z = ½(a+b-c) = 1$ hier=r

$$\text{Gergonne} =$$

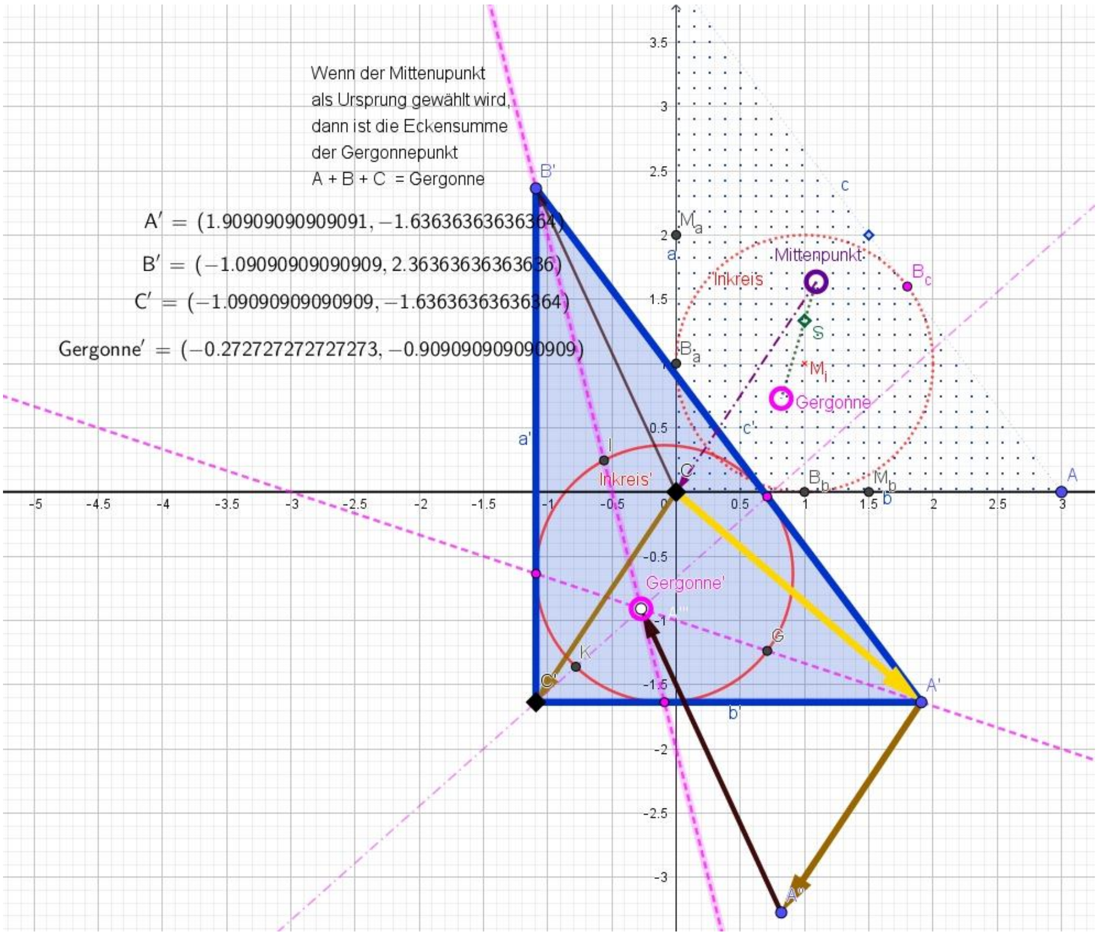
$$6\ [\quad 3 / \{4 * 2^2 + 6\}$$
$$+\ 4\mathbf{i} / \{3 * 3^2 + 6\} + 0]$$

$$= 6\ [\quad 3/22 + 24\mathbf{i} / \{33\}]$$

$$= 18/22 + 4i/(6+8i)/33\ \}]$$

$$= \mathbf{9/11 + 8i/11}$$
$$= 0.81p81 + 0.7272p27\ \mathbf{i}$$

Hier ist der Gergonnepunkt $\mathbf{G}_{er}$ **=** 1/11 **(8; 9)**



Liegt der **Mittenpunkt im Ursprung**, dann ist die Eckensumme A+B+C der Gergonne-Punkt denn

***Mitten-**, **Gergonne**- und **Schwerpunkt** liegen auf einer Geraden und*

Mitten-Gergonne** = 3 **(Mitten-S) [5]

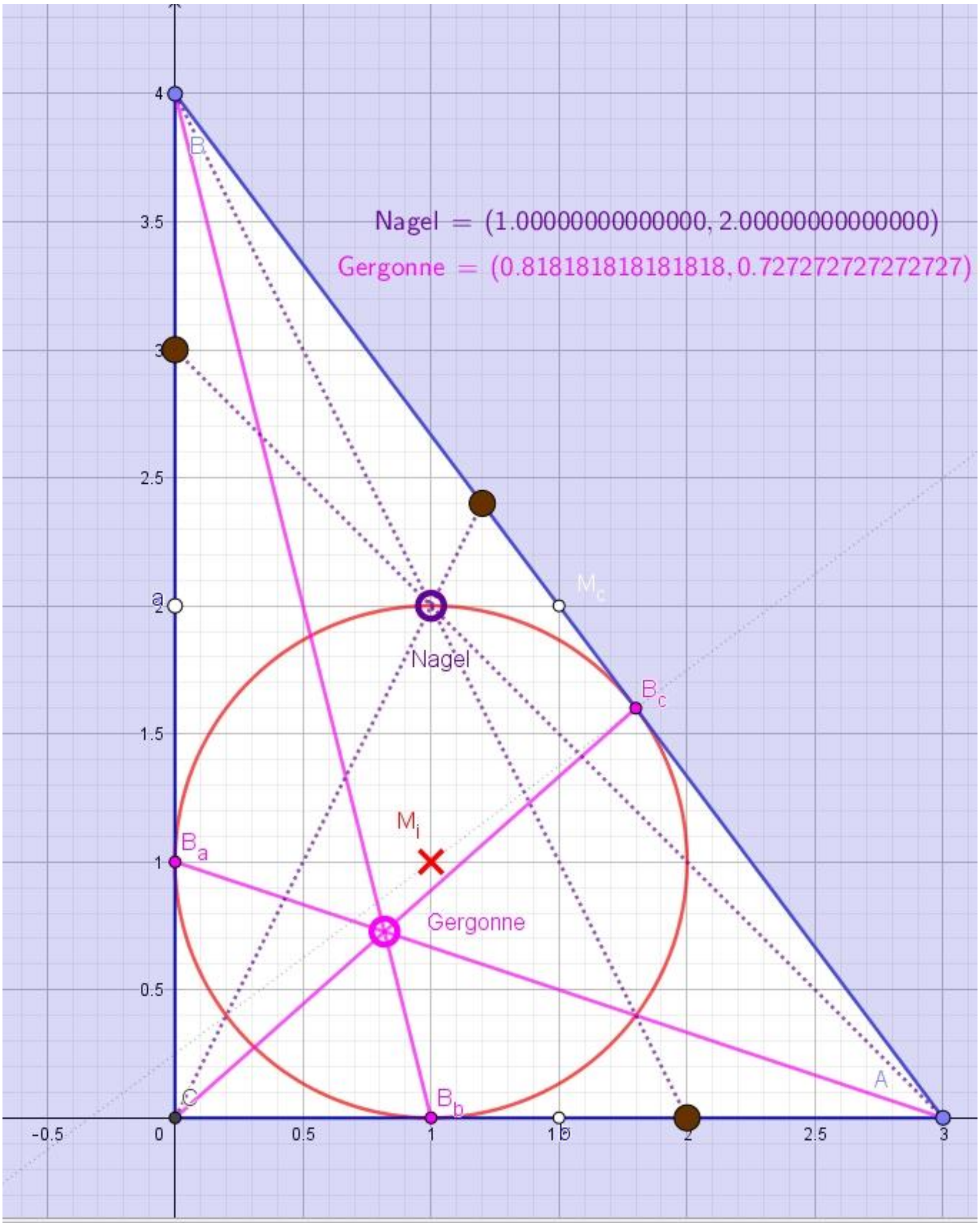
Machen wir den Mittenpunkt zum Ursprung, dann erhalten wir also als Eckensumme den Gergonnepunkt! Wenn die Inkreismitte M_i im Ursprung liegt, ergibt die Eckensumme A+B+C den **Nagelpunkt**. Er ist der **isotomisch konjugierte Punkte** zum **Gergonnepunkt**

---

[5] Liegt der Mittenpunkt im Ursprung, dann ist A+B+C der Gergonnepunkt!

A\`+B\`+C\` = A+B+C -3MITTENPUNKT
= 3(S-Mitten)= Gergonne

Spiegelt man die Berührpunkte mit dem Inkreis **an den Seitenmitten,** dann erhält man die **Ankreisberührpunkte** mit den Seiten. Nach Ceva schneiden sich deren Gegeneckverbindungen somit auch in einem Punkt, in dem nach Christian Nabel benannten **NAGEL-Punkt!**



Isotomisch konjugierte Punkte

Gergonne ist 1/11(8; 9) und Nagel (1; 2)

Für die Entfernung des Umkreiszentrums M_u zum Nagelpunkt gilt:

$$\boxed{\mathbf{M_u Nagel} = R-2r}$$

Beispiel in der vorhergehenden Abbildung ist

$\mathbf{M_u Nagel} = 0{,}5$ das ist 2,5 -2

Die **Entfernung des NAGEL-Punkts** zur **Inkreismitte** $\mathbf{M_i}$ ist

$$\mathbf{M_i}\text{-}\mathbf{Nagelpunkt} = |\,\mathbf{A}+\mathbf{B}+C-3\mathbf{M}_i\,|$$

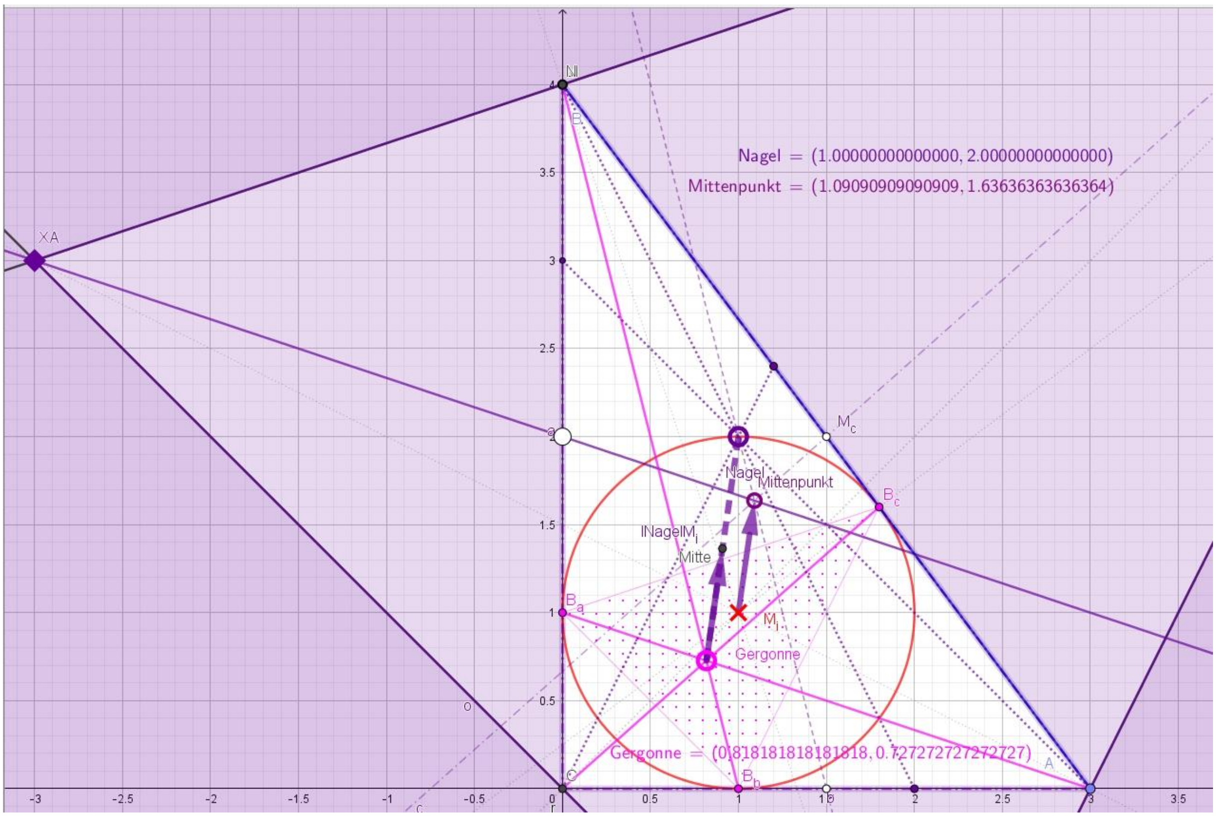
Allgemein ist nämlich der **Nagelpunkt** = $\boxed{A+B+C-2\mathbf{M}_i}$

Daher ist $|\,\text{Nagel} - M_i\,| = |\,A+B+C-2\mathbf{M}_i - \mathbf{M}_i\,| = |\,\mathbf{A}+\mathbf{B}+C-3\mathbf{M}_i\,|$

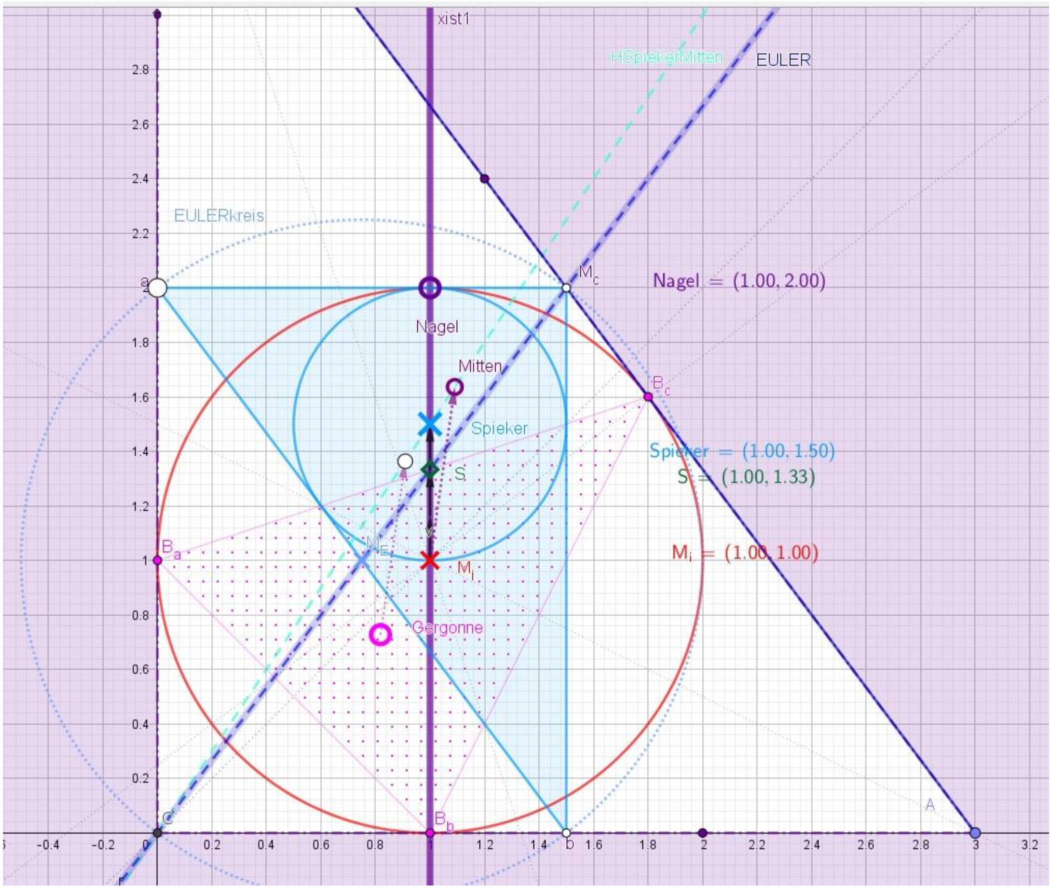
Im Beispiel der vorhergehenden Abbildung ist sie 1

Die **Strecke vom** **Gergonne- zum** **Nagel-Punkt** **ist parallel** zu der vom **Mitten**-Punkt zu $\mathbf{M_i}$ und genau **doppelt** so groß

Die Nagelgerade schneidet sich mit der Geraden durch den Gergonne- und Mittenpunkt im Schwerpunkt S (→ 2. Strahlensatz)



Verbindet man die Mitten der Seiten mit den naheliegenden Ankreiszentren, dann sind diese Verbindungen kopunktal und scheiden sich im **Mittenpunkt!**



EULER- und **NAGEL-Gerade** schneiden sich in **S**

Der ***Mittenpunkt*** ist auch

$= \boxed{\mathbf{M_i + ½(Nagel\text{-}Gergonne)}}$

Berechnen wir den Mittenpunkt:

Liegt insbesondere C im Ursprung

und B auf der x-Achse, dann ist der **Mittenpunkt**

$$= \tfrac{1}{2}\{\mathbf{A+B} - \boldsymbol{A}r[\ A/(ax^2+\boldsymbol{A}r) + B/(by^2+\boldsymbol{A}r)]\}$$

Beispiel:

Standard-Dreieck A = 3, B =4i und C = 0+0i

a=4, b=3 und Hypotenuse c=5

Fläche $A_\Delta = 6$, r = 1

Tangentialabschnitte x = ½(b+c -a) =2

y = ½(c+a -b) = 3

z = ½(a+b -c) = 1

(x+y = c xy = A_Δ=6 und hier z = r =1)

$$\textbf{Mittenpunkt} = \tfrac{1}{2}\{3+4\mathbf{i} - 6\,[3/(4*2^2+6) + 4\mathbf{i}/(3*3^2+6)]\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\{3+4\mathbf{i} - 6\,[3/(22) + 4\mathbf{i}/(33)]\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\{3+4\mathbf{i} - [9/11 + 8\mathbf{i}/11]\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\{24/11 + 36\mathbf{i}/11\}$$

$$= 12/11 + 18\mathbf{i}/11$$

$$\mathbf{= (12;\ 18)/11}$$

Während man die lineare Verbindung vom **Umkreiszentrum M_u** und dem Schwerpunkt **S** als Euler-Gerade bezeichnet, ist diejenige des **Inkreiszentrums M_i** mit dem Schwerpunkt **S** NAGEL-Gerade:

Inkreismitte**, **Schwerpunkt, Nagelpunkt** und **- Spiekerpunkt
*liegen auf einer Geraden, der **Nagel-Geraden**[6]!*

Der **Spiekerkreis** ist der Inkreis des Mittendreiecks, geht also durch eine zentrische Streckung von M_i an S mit k=-0.5 hervor.

M_i –Spiekerpunkt = 3 (**S**-Spiekerpunkt)

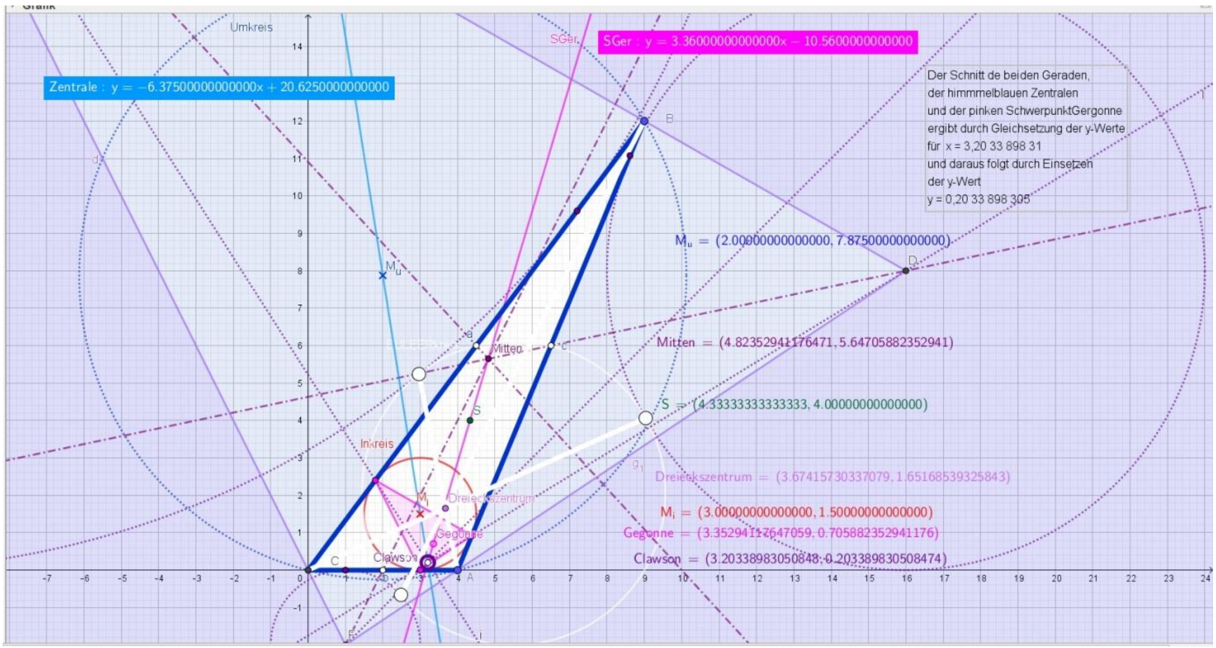
Legt man den Spiekerpunkt also in den Ursprung, dann ist die Summe der Eckpunkte A+B+C die Inkreismitte!

Will man die Koordinaten des **Spiekerpunkts** berechnen, so könnte man auch M_i an S zentrisch strecken mit k=-0.5
Nehmen wir den **Spiekerpunkt** in den Ursprung, erhalten wir als Eckensumme das **Inkreiszentrum M_i**! Beispielsweise beim Std-Dreieck ist M_i =(1; 1) und S = (1; 4/3). Somit bleibt der x-Wert des Spiekerpunkts 1 und für den y-Wert wird die 1/3 - Entfernung von S zu Mi halbiert und zu 1/3 addiert, was 0,5 ergibt und somit der y-Wert des Spiekerpunkts dann 1 + 0,5 =1,5 wird!

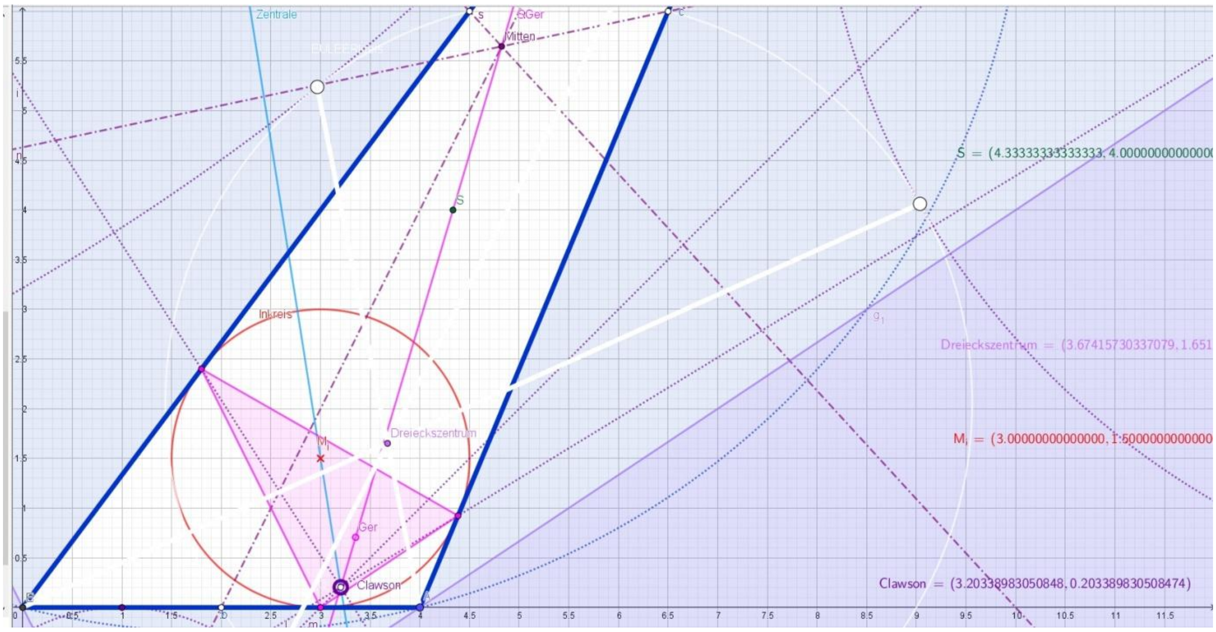
Der **Höhenschnitt-** H, der **Mitten-**, und der **Spiekerpunkt** sind kollinear!

---

[6] Die zuweilen auch als **zweite** EULER-Gerade bezeichnet wird. Die Gerade durch Gergonne und den Schwerpunkt wäre dann die **dritte** EULER-Gerade!



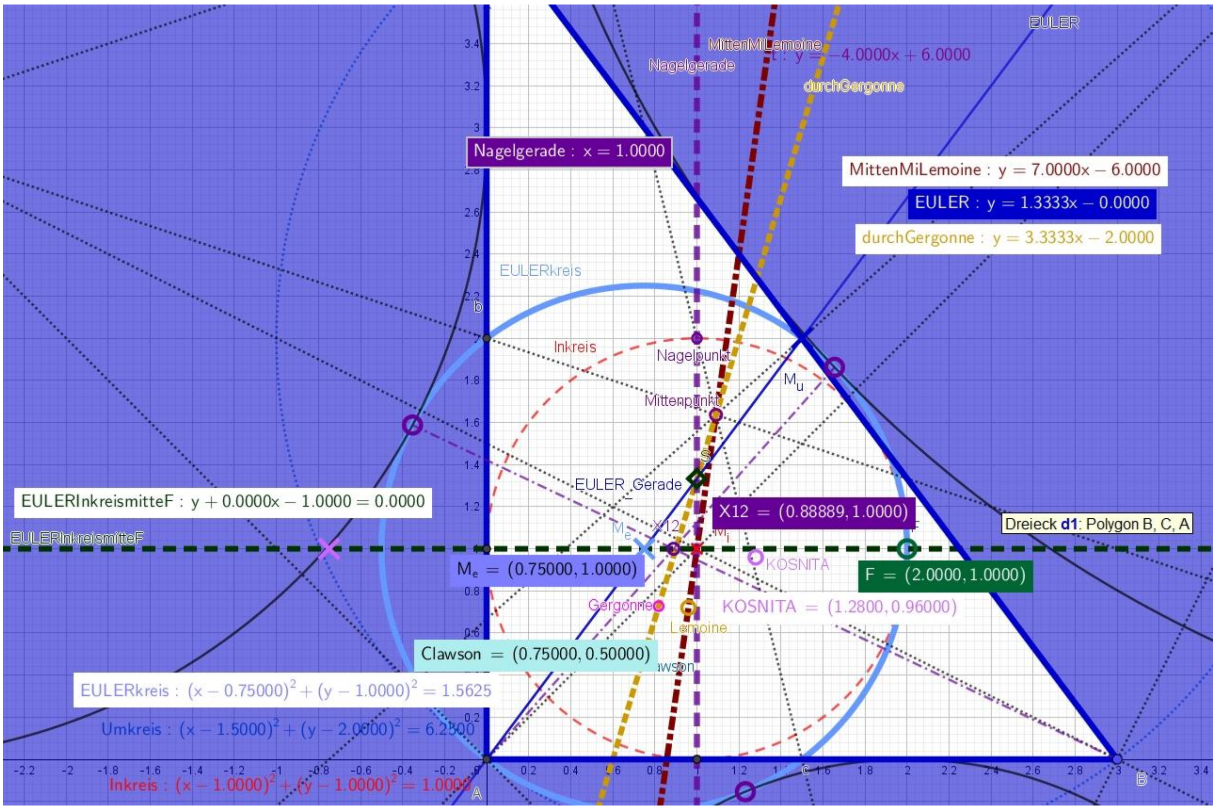
Clawson ist das Zentrum der direkten Ähnlichkeit
des Inkreisberührpunkte- und des Ankreiszentren-Dreiecks
mit dem Streckungsfaktor 2R/r



Dreieckszentrum

Der Inkreis ***berührt auch die***
drei Ankreise in drei Punkten,
deren Verbindungen mit den
gegenüberliegenden Dreiecksecken sich
in einem Punkt schneiden.[7]

[7] Das Dreieckszentrum **liegt nicht** auf der **Geraden durch den Gergonne- und den Schwerpunkt S**, auf der auch der Mitten-und CLAWSONpunkt liegt!



EULER-, „**Gergonne**"- und **NAGEL-Gerade**
schneiden sich im Schwerpunkt **S**
(1, 2. und 3. EULERgerade)

*Die Gerade[8] durch **Gergonne-** und den **Schwerpunkt S** schneidet sich mit der Zentralen M_iM_u, die durch die Zentren des Inkreises M_i und des Umkreises M_u*

*im **Clawson-Punkt**,*

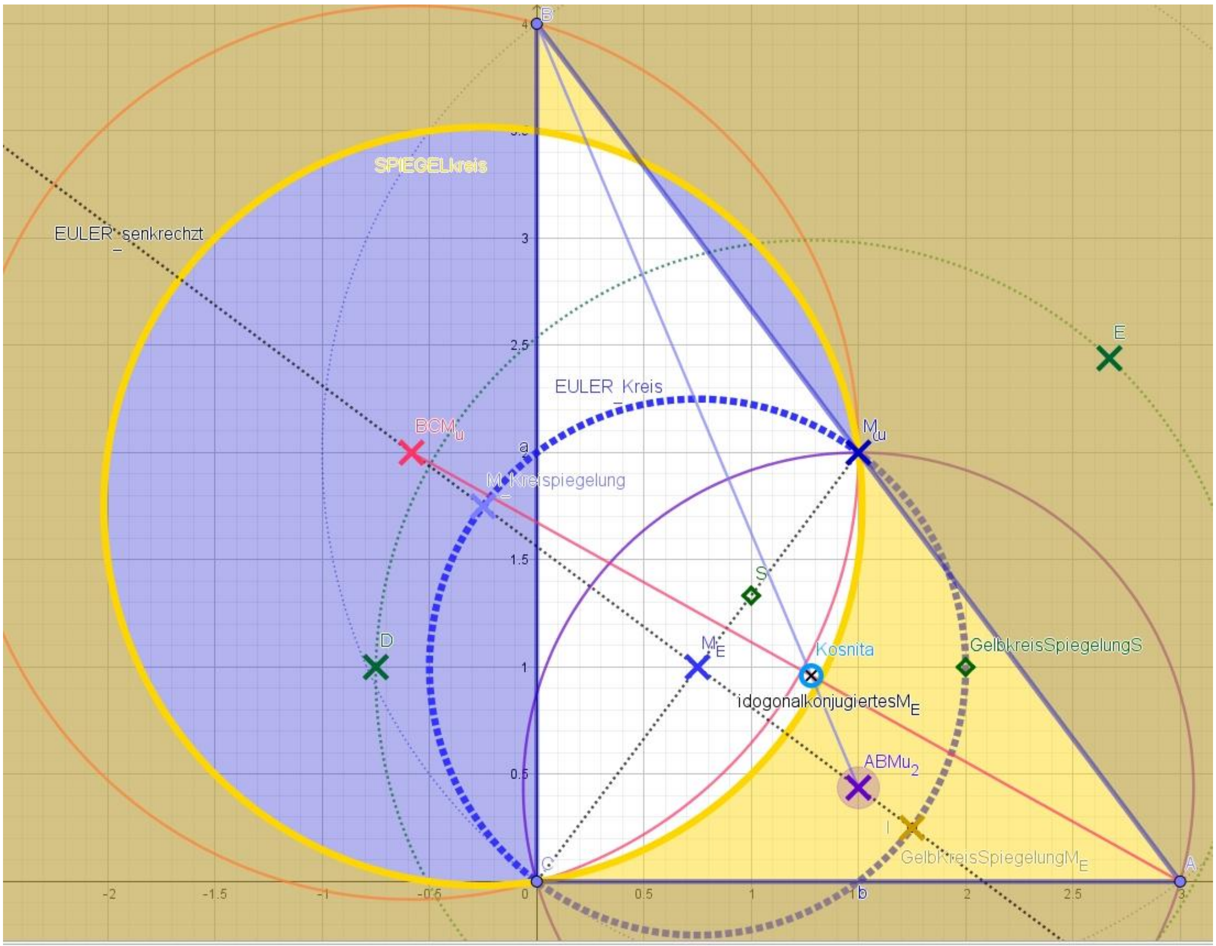
welcher das Steckungszentrum für die Ähnlichkeits-Abbildung des Berührpunktedreiecks in das Ankreismittendreieck

mit k=2R/r ist.

Im rechtwinkligen Dreieck der folgenden Abb. ist er (0,75; 0,5)

---

[8] *Man möchte sie in Anlehnung zur Nagelgeraden auch Gergonne-Gerade nennen, aber für die Gergonne wurde eigentlich schon eine andere Gerade gewählt, die senkrecht auf der Soddy-Geraden steht!*



Die EULER-Kreis-Mitte M_E wird isogonal konjugiert zum **Kosnita-Punkt!**[9]

Die durch das Umkreiszentrum und zwei Ecken drei entstehenden Teildreiecke[10] haben ein Umkreiszentrum, das man jeweils mit der dritten Ecke verbindet. Diese drei Verbindungen sind kopunktal.

[10] beim rechtwinkligen sind es nur zwei

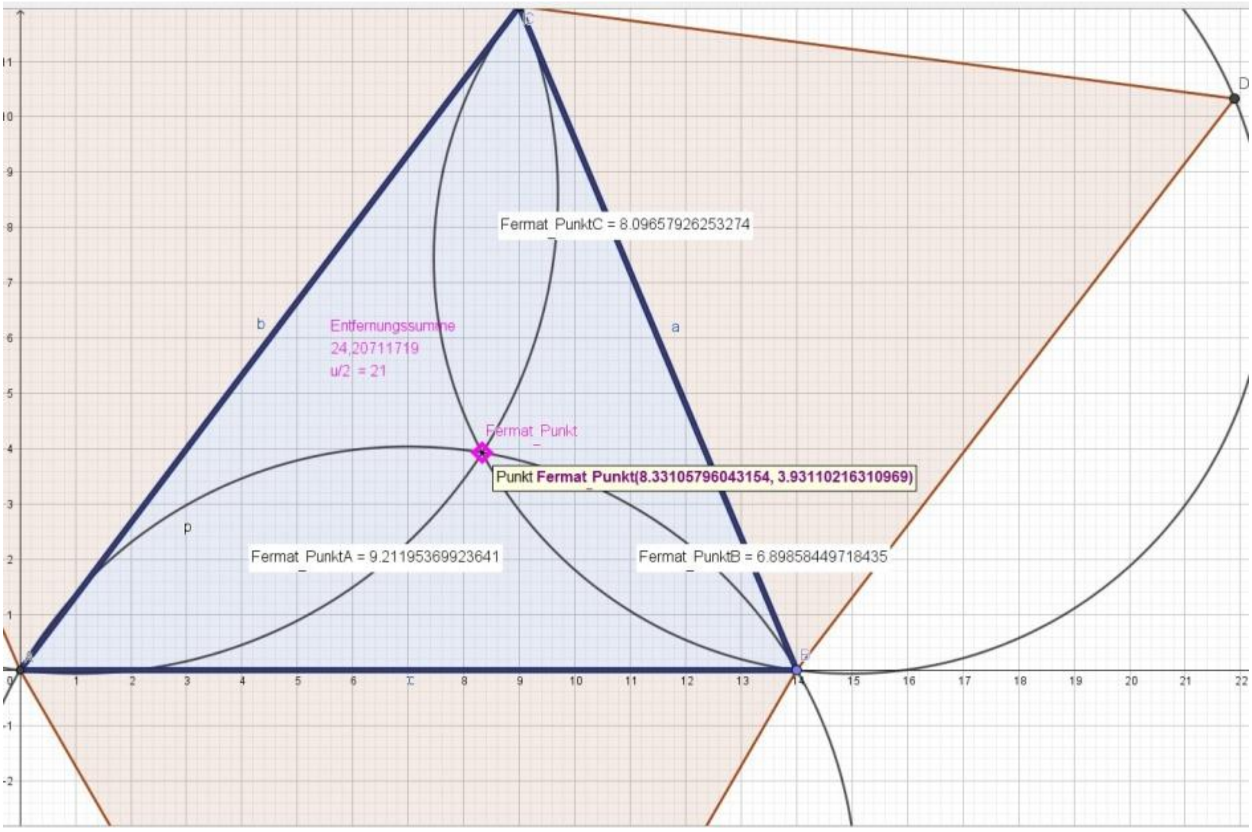
Weitere *isogonal konjugierte* Punkte

Der **Fermat-Punkt** [11]

als Schnitt der Umkreise
der aufgesetzten regelmäßigen Dreiecke

(oder den Außen-Dreiecksspitzen–Gegeneckverbindungen)

hat die **minimale Entfernungssumme** zu den Ecken

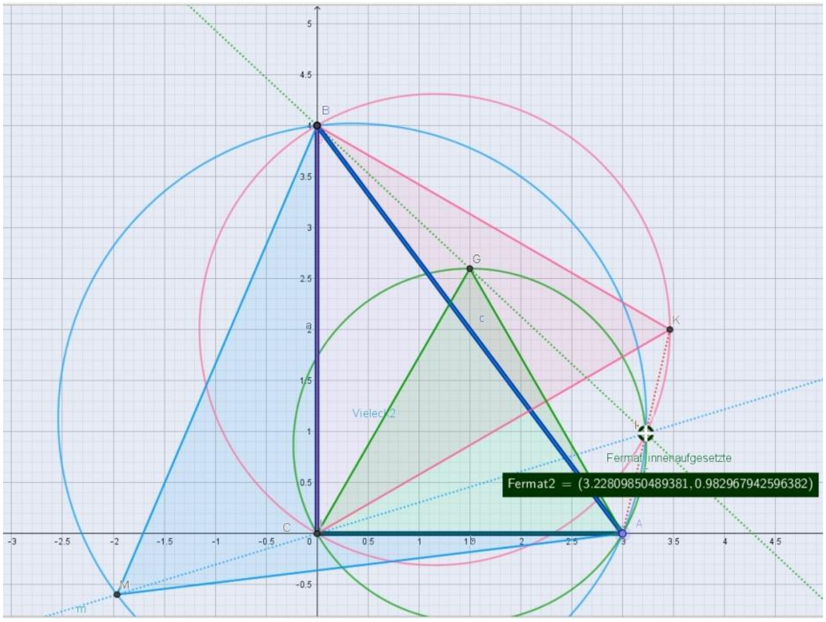


Heronsches Dreieck der Seitenlängen 13, 14 und 15

Fermat-Punkt (8,33; 3,93)![12]

[11] vom französischen Richter und Mathematiker Pierre de Fermat

[12] kleiner als x = 9 und unterhalb von y = 4



Der **zweite Fermat-Punkt** mit den **nach innen aufgesetzten gleichseitigen Dreiecken**

Fermat-Punkt =

$$(C^*-B^*)\mathbf{A} + \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-i)(A^*-C^*)\mathbf{B} - \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}+i)(B^*-A^*)\mathbf{C}$$

/

$$/\ \{(C^*-B^*) + \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-i)(A^*-C^*) - \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}+i)(B^*-A^*)\}$$

Liegt insbesondere

A = 0 im Ursprung

und B = (b; 0) auf der x-Achse

B = b+0i = B* = b

C = $\mathbf{c_x + ic_y}$

(Stern für komplex-konjugiert C*= $c_x - ic_y$)

dann ist der **Fermat-Punkt** F_{eg}

ist (wohl meist oder immer) ein irrationaler Wert

$F_{ermat} = b\,[\,(1-i\sqrt{3})(\,c_x - ic_y)-(1+i\sqrt{3})(c_x + ic_y)\,]$
$/\{(2\,(c_x-b\,-ic_y)+(1-i\sqrt{3})(c_x-ic_y)-(1+i\sqrt{3})\,b\}$

$Fer_{mat} = b\,[\,(1-i\sqrt{3})(\,c_x - ic_y)-(1+i\sqrt{3})(c_x + ic_y)\,]$
$/\{(2\,(c_x-b\,-ic_y)+(1-i\sqrt{3})(c_x-ic_y)-(1+i\sqrt{3})\,b\}$

Der x-Wert des Fermat-Punktes (Real-Teil)

für A = 0, B = b und C = $(c_x;\, c_y)$ ist

$$\mathbf{F_{ex}} = \mathbf{2b}\{\, b(\sqrt{3}c_y + 3c_x)\;\; +3c_x^2\;\; +3c_y^2\; + 4\sqrt{3}c_xc_y\,\}$$

$$/\;\{\,[3(b-c_x)+c_y\sqrt{3}]^2+[\,\sqrt{3}(b+c_x)+3c_y]^2\,\}$$

Beispiel A= 0, B = b=3 und C =4i $c_x=0$ $c_y=4$

$$\mathbf{F_{ex}} = 2*3\{\,3(\sqrt{3}*4 + 0)\;\; +0\;\; +48\; + 4\sqrt{0}\,\}$$

$$/\;\{\,[3(3)+4\sqrt{3}]^2+[\,\sqrt{3}(3)+12]^2\,\}$$

$$= 6\{\,12\sqrt{3}+48\}$$

$$/\;\{\,[9+4\sqrt{3}]^2+[\,3\sqrt{3}+12]^2\,\}$$

=72√3+288}

/ { [81+72√3 + 48]+[27+72+144] }

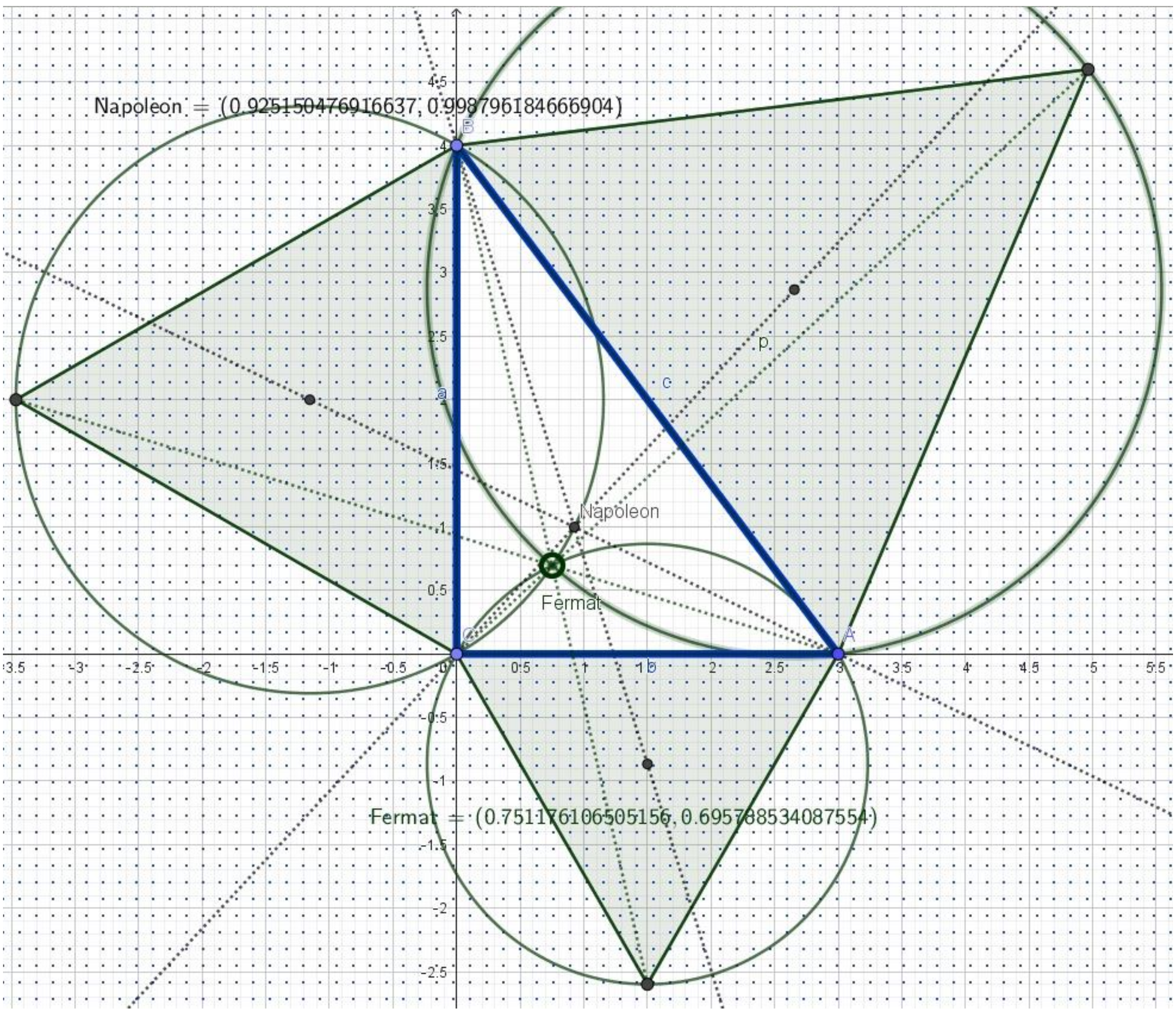
=72√3+288}

/ { [81+72√3 + 48]+[27+72√3 +144] }

= (72√3+288) / (300+144√3)

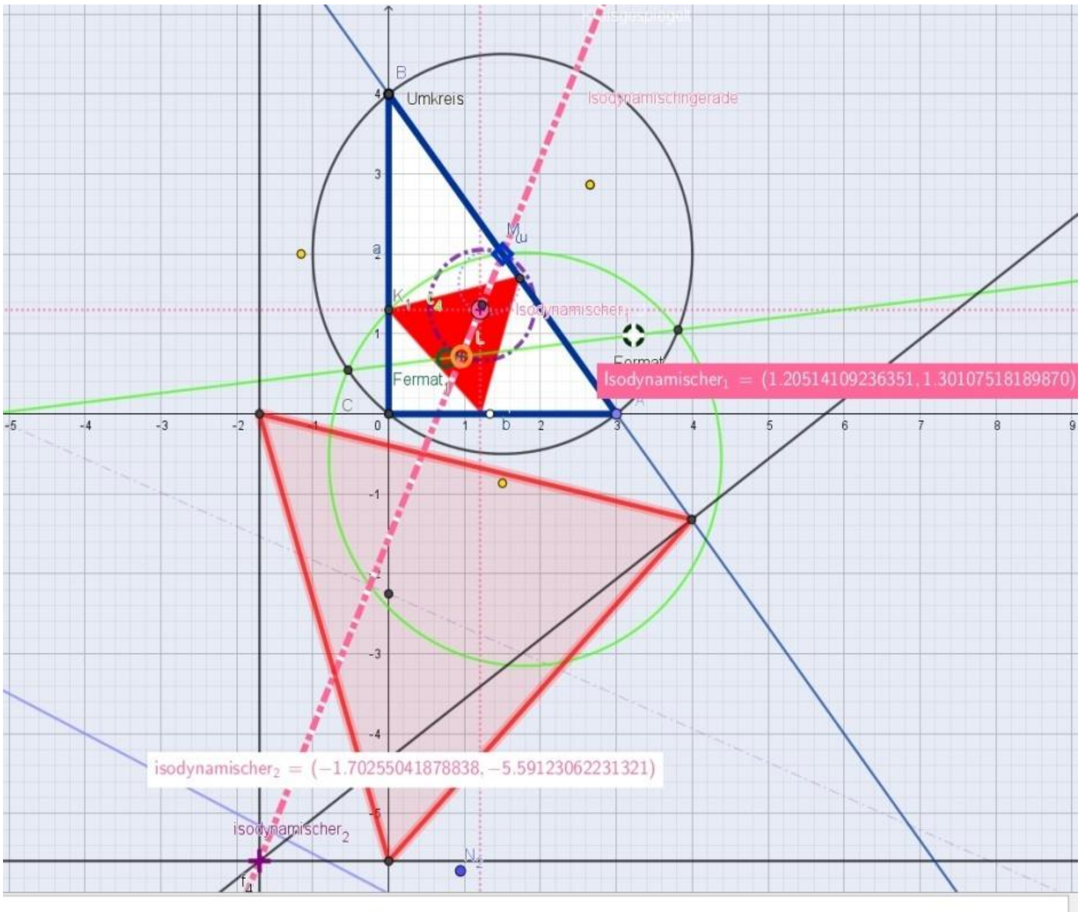
=412,70766../ (300+144√3)

= 0,7511761065… OK-→folgende Abb.



Di Verbindungen vom Schwerpunkt der aufgesetzten Gleichseitigen
zu den Gegenecken scheiden sich im Napoleon-Punkt

Die beiden **Isodynamische Punkte**



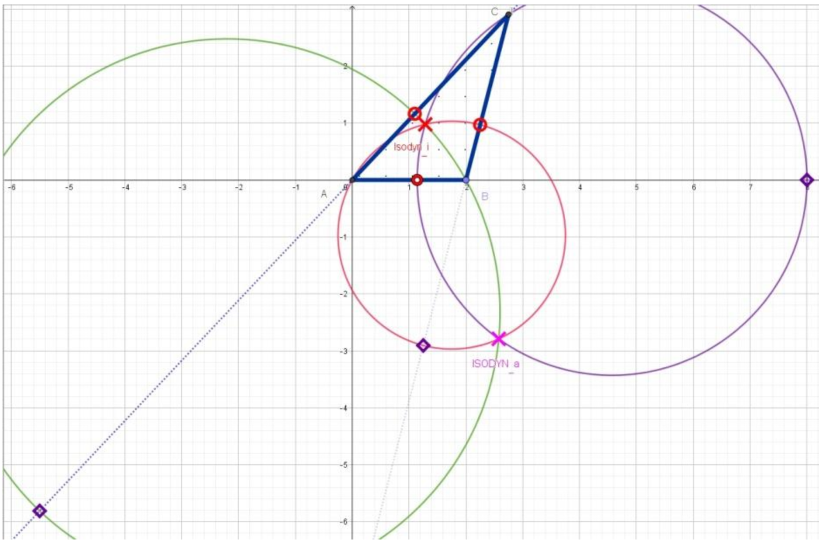
Die **LOT-Fußpunkte eines**

isodynamischen Punktes

auf die Seiten des Dreiecks

(bzw. deren Verlängerungen)

liefern ein gleichseitiges Dreieck!

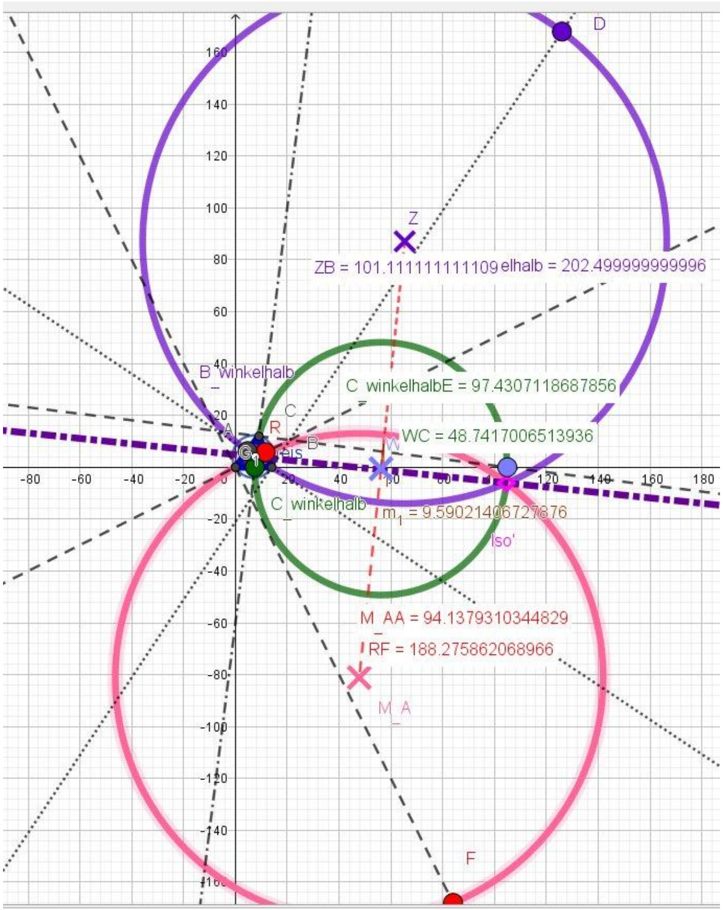


. Drei Apollonische Kreise
als Thaleskreise durch
die von den Winkelhalbierenden
erzeugten einen die Seite
von innen und außen
harmonisch teilenden Punkt.

Die gemeinsamen Schnitte sind
die beiden Isodynamichen !
(mit einem roten x)

Durch **Kreisspiegelung am Umkreis**
gehen die
beiden isodynamischen Punkte
ineinander über.

Durch die beiden isodynamischen Punkte und jeweils eine Dreiecksecke gehen drei Kreise, die auch durch den jeweiligen Schnittpunkt der inneren Winkelhalbierenden und der äußeren Winkelhalbierenden mit der Gegenseite bzw. deren Verlängerung geht (jeweils einen Kreisdurchmesser bildend).



Alle **drei Apolloniuskreise** sind KOAXIAL

d.h. sie schneiden sich

in genau zwei Punkten,

den isodynamischen Punkten

Die beiden isodynamischen Punkte

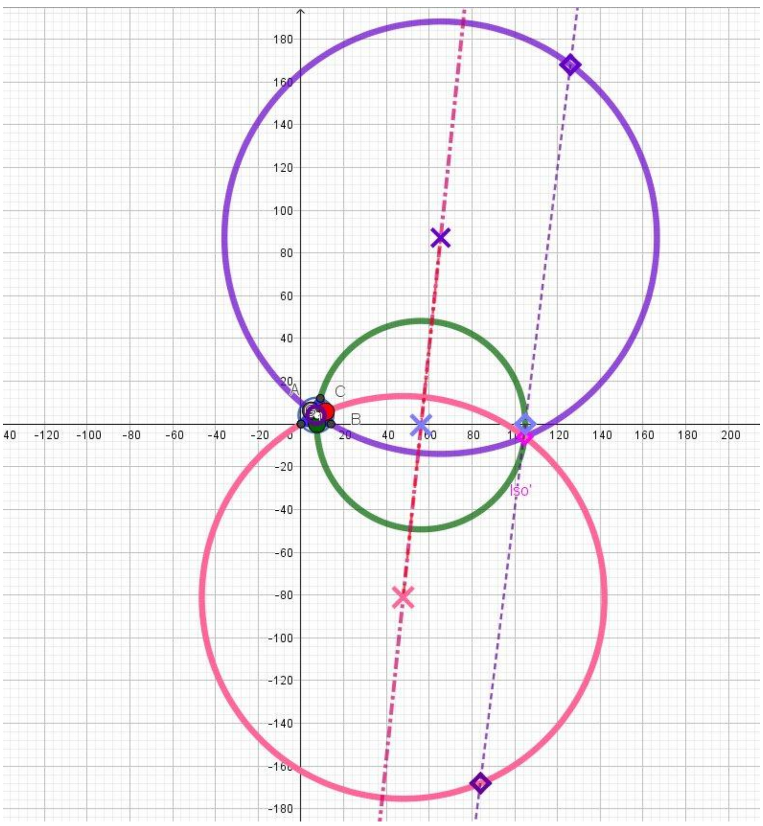
sind zu den beiden

Fermatpunkten

(nach außen und innen aufgesetzte reg. Dreiecke)

die **isogonal konjugierten** Punkte**!**

. Die zwei Isodynamischen Punkte liegen auf der Brocardachse, die durch den **Symmedian L** und **M_u** geht (als Durchmesser des Brocardkreises), und die **senkrecht** auf der **Geraden der Apolloniuskreismitten** steht!



Die drei Keismitten sind kollinear

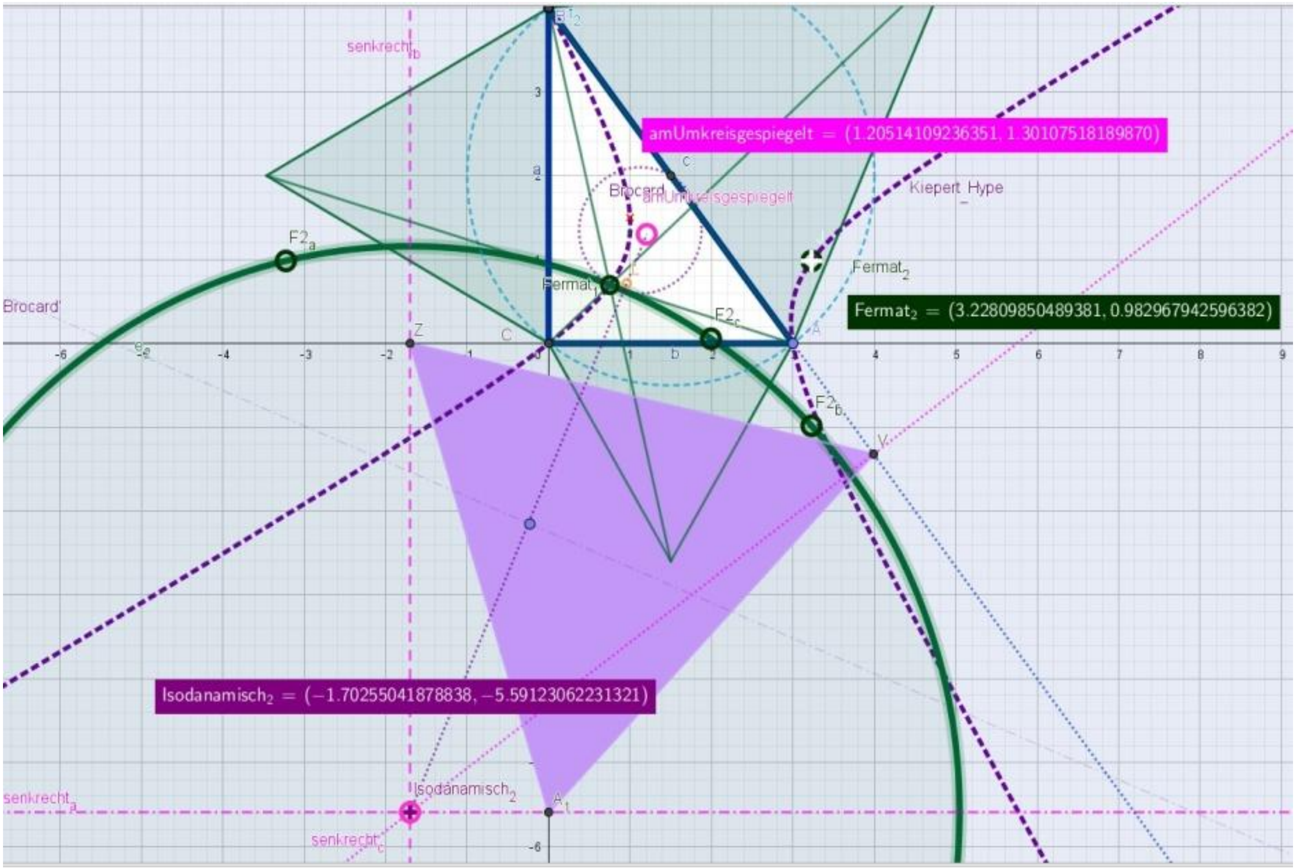
(und auch die drei äußeren Teilpunkte

liegen auf einer Geraden)

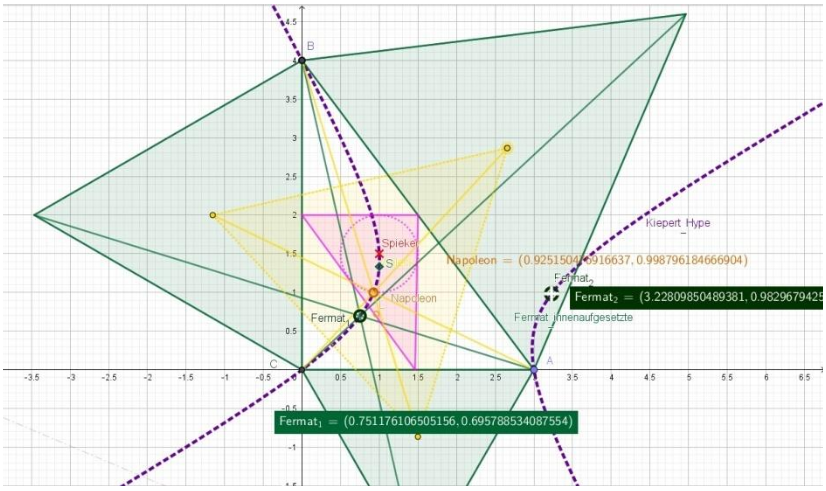
Die Gerade der Mitten **der drei Apollonius-Kreise**

werden durch **Spiegelung am Umkreis**

in den **Brocardkreis** abgebildet!



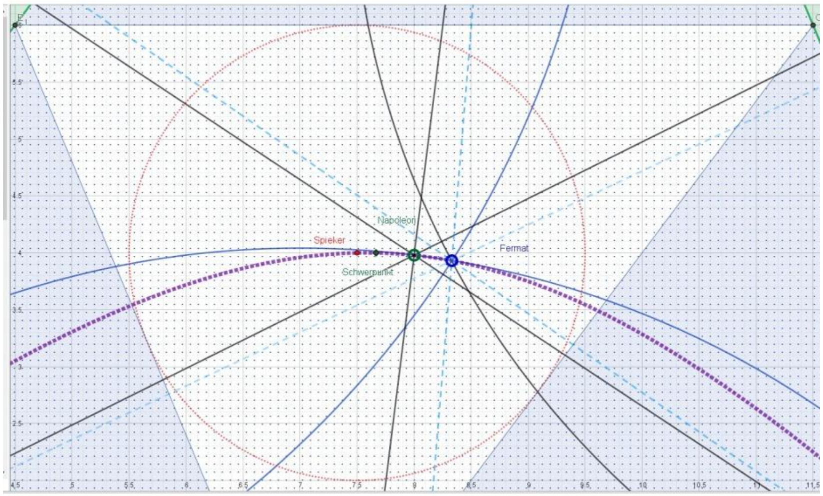
Konstruktion des Isodynamische Punkts vom zweiten Fermatpunkt



Die **Fermat**-Punkte

liegen auf der (lila gestrichelten)

Kiepert-Hyperbel auf verschiedenen Ästen



Der **Fermat**-Punkt und auch der **Napoleon**-Punkt

liegen auf der (lila gestrichelten)

Kiepert-Hyperbel,

die **durch alle Dreiecksecken**

und auch durch den **Schwerpunkt**

und Spiekerpunkt geht.

Hier ist noch das Mittendreieck

mit seinem Inkreis eingezeichnet

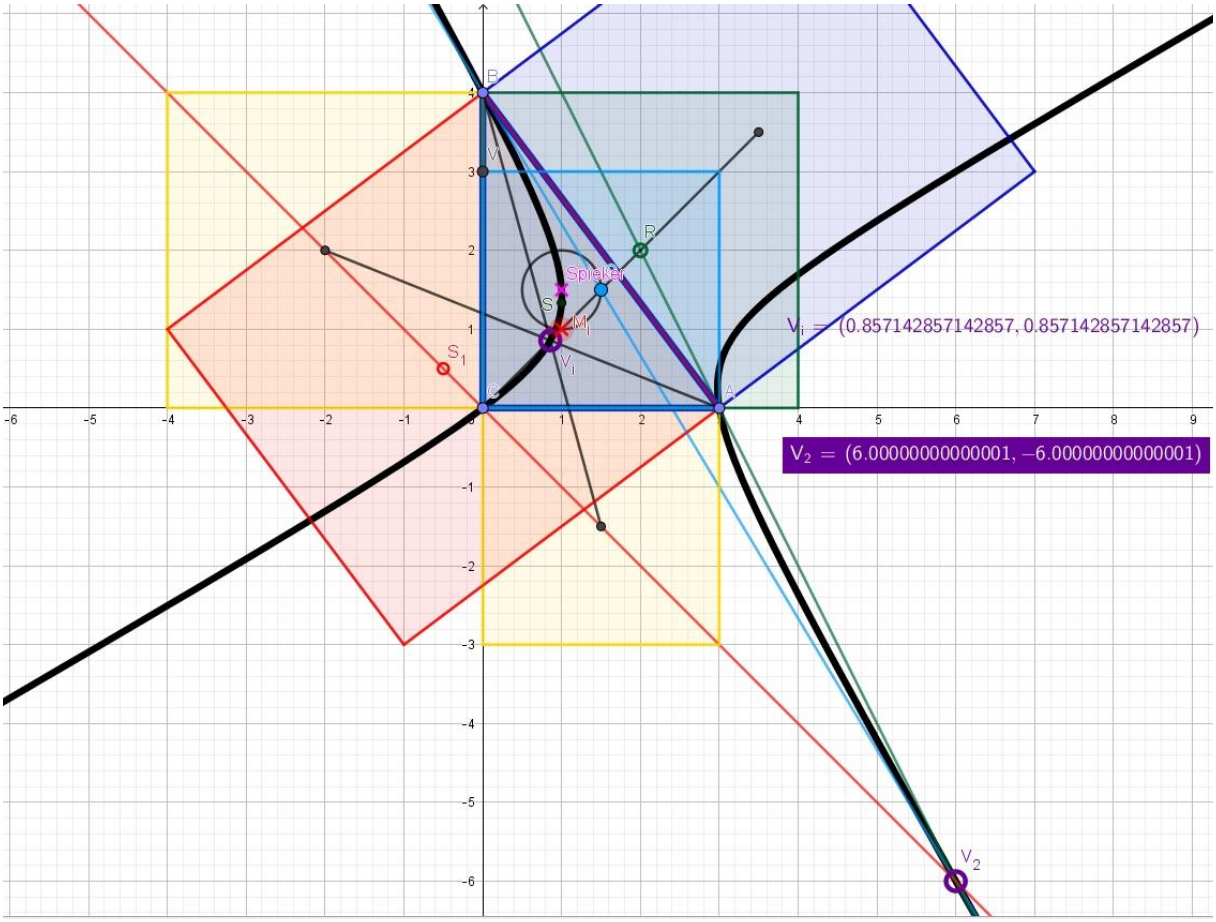
(rot gepunkteter Spiekerkreis),

dessen Mitte der Spiekerpunkt ist.

Setzt man QUADRATE auf die Dreiecksseiten und verbindet deren Schwerpunkte jeweils mit der Gegenecke, dann sind diese 3 Verbindungen kopunktal und schneiden sich im Punkt V_1.

Man kann die Quadrate auch nach innen aussetzen und hat dann analog einen Punkt V_2.

Diese zwei V-Punkte liegen auch auf der Kieperthyperbel!



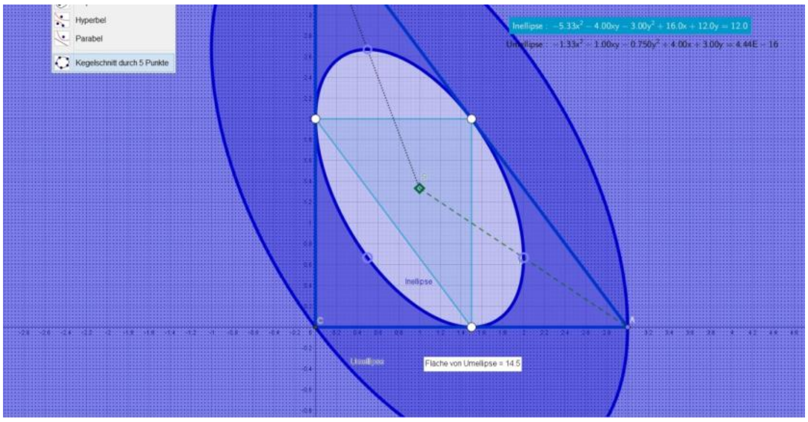
Bei den nach innen aufgesetzten Quadraten hat der zweite Punkt in unserem Standard.-Dreieck sogar ganzzahlige Koordinaten!

Die Steiner-Ellipsen

und

der Steiner-Punkt

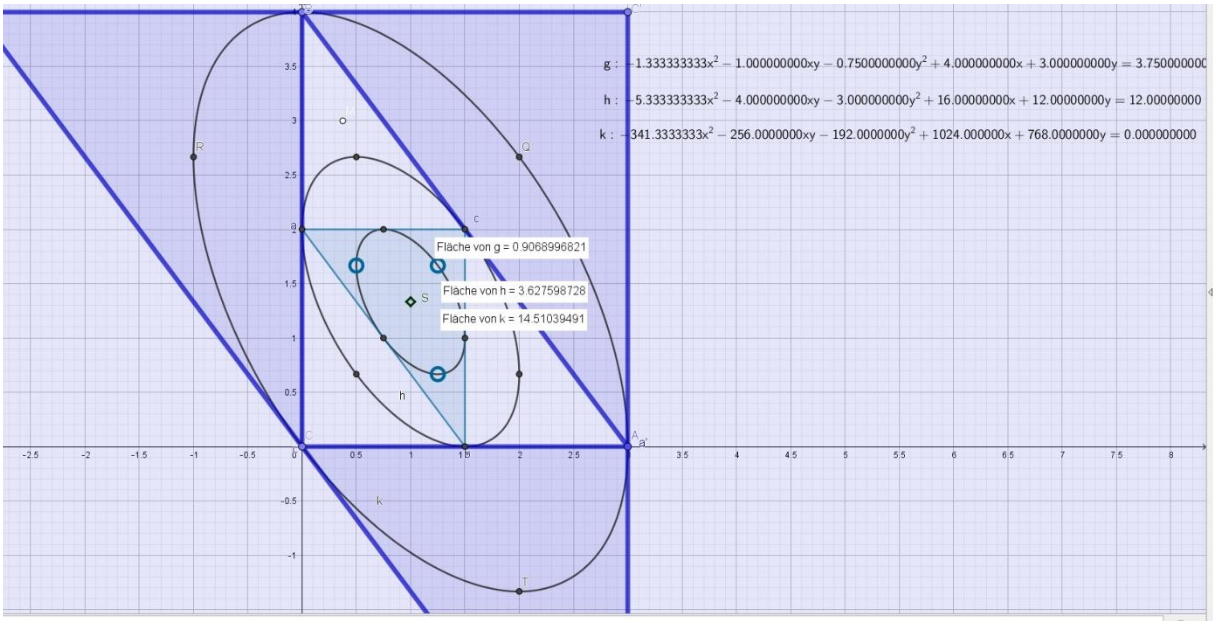
In Geogebra kann man problemlos mit fünf Punkten jeden Kegelschnitt zeichnen, während man für Kreise und Geraden mit drei Punkten auskommt! Für die Steinersche IN-Ellipse hat man die Seitenmitten als Berührpunkte und nimmt noch zwei der drei Mitten der Strecken von den Ecken zum Schwerpunkt, der auch der Ellipsenmittelpunkt ist!



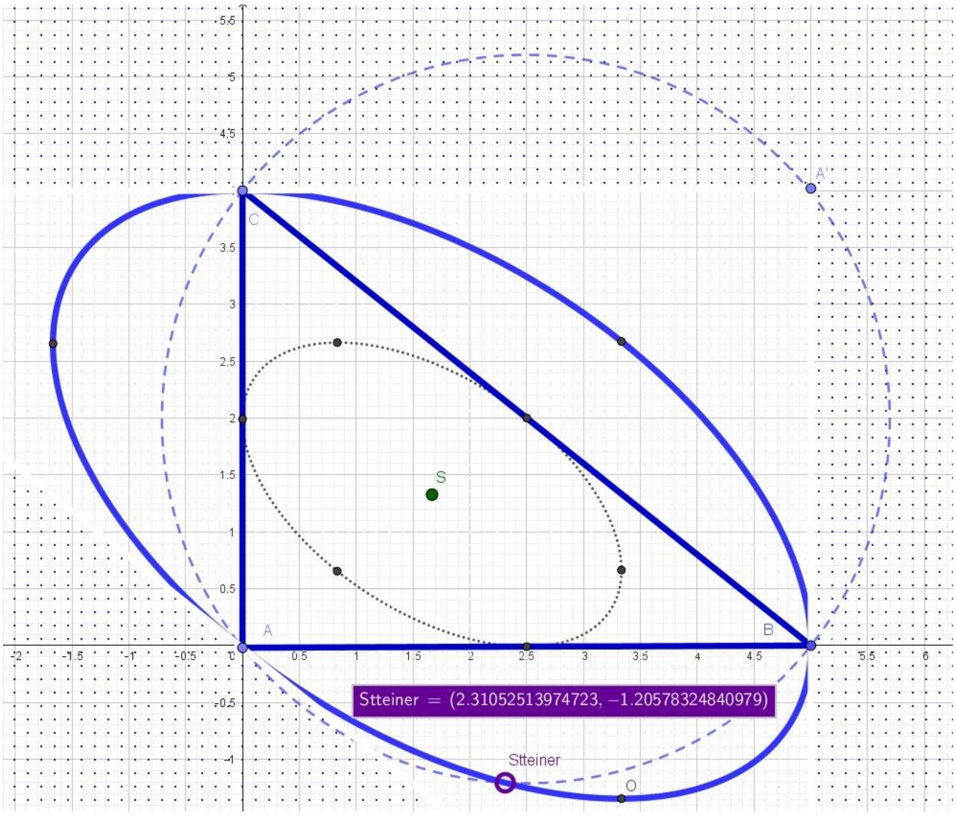
Die Steinersche Inellipse ist die maximalflächigste Inellipse und flächen-minimalste Umellipse des Mittendreiecks

Extremale Flächen bei den In- und Um-Ellipsen

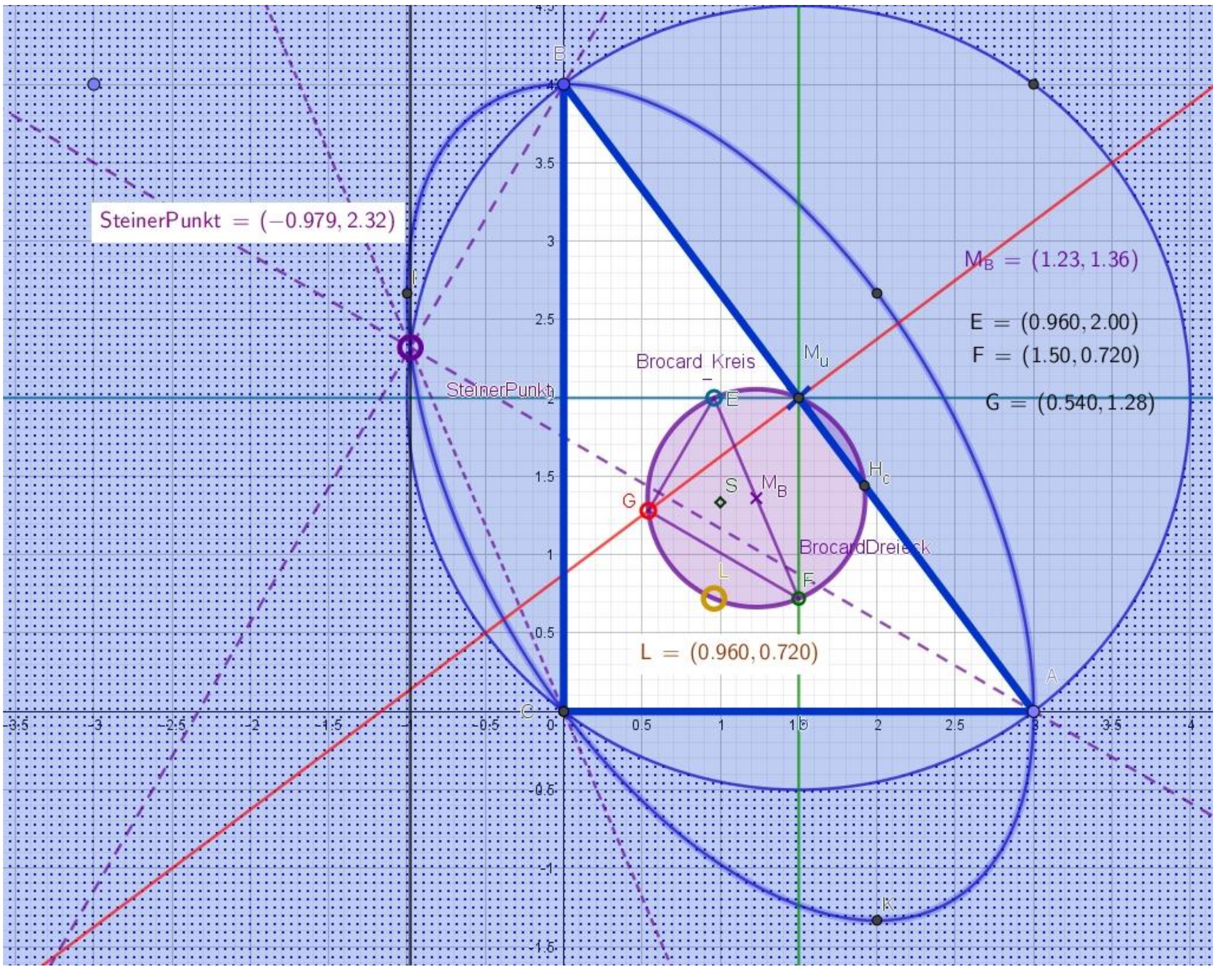
Die Fläche der Steinerschen Inellipse ist 3,6276 (maximale für Inellipsen) und die der Steinerschen Umellipse ist 14,51038 (genau viermal so groß). Man kann die beiden durch eine zentrische Streckung an S mit k = 2 bzw. ½ ineinander überführen!



Die Steiner-Umellipse ist nichts anderes
als die Steiner-Inellipse des Antimittendreiecks

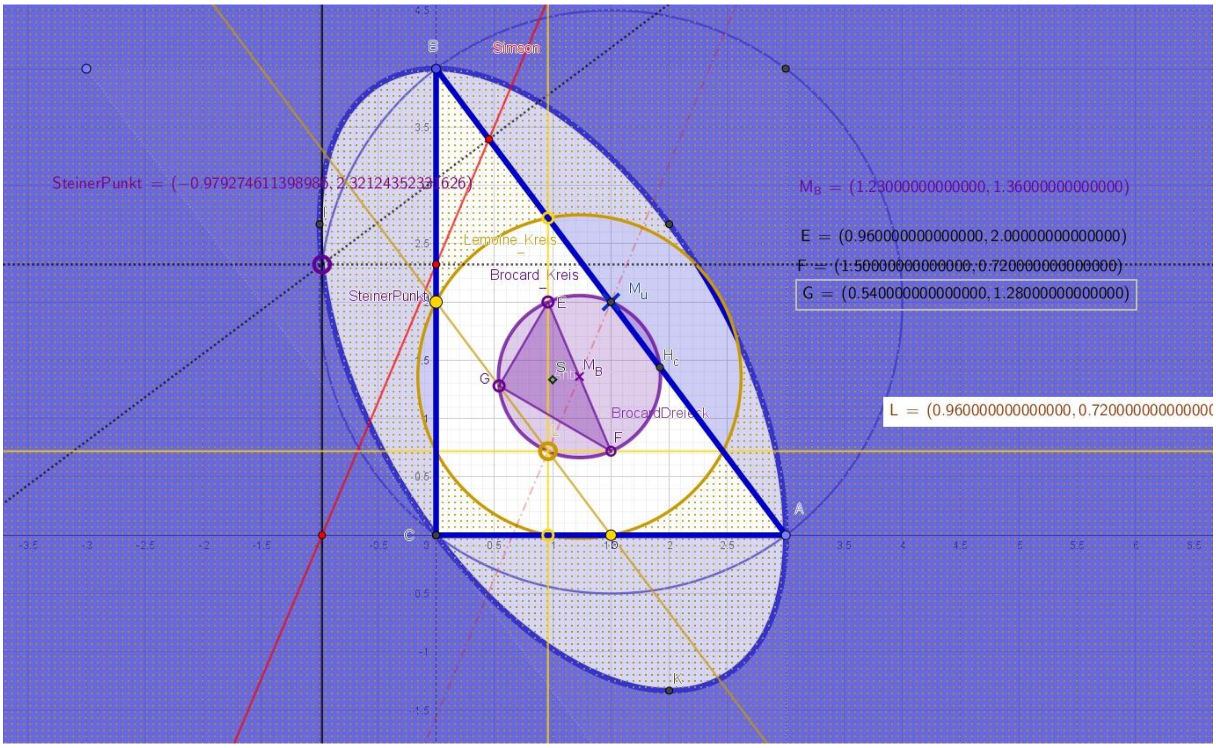


Schnitt Um-Ellipse mit Umkreis



Konstruktion des Brocard-Dreiecks durch die Schnitte der Seitensenkrechten durch M_u
(drei verschiedene Farben hellblau, grün und rot)

Konstruktion des Steiner-Punktes durch Seitenparallelen zu den Seiten des Brocard-Dreiecks durch die Dreiecksecken A, B und C (viola gestrichelt) schneiden sich im Steinerpunkt.



Die **Simson**-Gerade (rot) zum Steinerpunkt

(Die drei Projektionen eines Umfangpunktes auf die Seiten bzw. deren Verlängerungen sind kollinear)

ist parallel zum Brocard-Durchmesser LM_u

Komplexe Zahlen

Die komplexe Welt hat zwei Dimensionen und baut auf der reellen Einheit und der diese um 90° gedrehte imaginären Einheit i auf. Die Multiplikation ist eine Drehstreckung (sie ist sogar eine reine Addition der Winkel, wenn es sich um Punkte auf dem Einheitskreis handelt, wo der Betrag Eins ist).

Sie enthält mit der Variablen z **immer auch zugleich die konjugiert komplexe Spiegelwelt** z-Quer

(hier Tastatur-technisch mit einem Asterix gekennzeichnet als z*).

Es ist fast wie Platons Höhlengleichnis, eine Schattenwelt in der wir leben, und die wir nur von der Realität wahrnehmen können. Ohne diese um die reelle Achse geklappte Spiegelwelt geht nichts. An Stelle von den beiden Dimensionen in x und senkrechter y-Richtung haben wir nämlich nur eine einzige Größe

$$z = x + y\mathbf{i}$$

$$z^* = x - y\mathbf{i}$$

Die Addition und Multiplikation von z und z* eliminiert die Imaginarität und ist daher immer eine reelle Größe!

$$(z + z^*) = 2x$$

$$z * z^* = x^2+y^2$$

(Betrags- oder Längen-Quadrat)

$zz^* = r^2$

ist die **Kreisgleichung** um den Ursprung mit Radius r

und allgemein um das Zentrum z_M

$(z- z_M)\ (z^*- z_M^*\ )= r^2$

Den y—Wert erhält man als Differenz von z und z*

$z - z^* = 2y\mathbf{i}$

sie ist rein imaginär und man muss nur noch durch 2**i** teilen.

Wenn man die Geraden durch eine komplex Gleichung beschreibt, so muss man neben der Variablen z auch das konjugiert komplexe z* verwenden. Besonders vorteilhaft kann man damit die Gleichungen für die Lotgeraden und Mittelsenkrechten finden.